4. Om plan- en syaansigte van 3-dimensionele voorwerpe volgens skaal te teken
5. Om die beginsel van translasie en geskikte notasies te leer

Getalle - waar kom hulle vandaan?

WISKUNDE

Graad 9

GETALLE

Module 1

GETALLE – WAAR KOM HULLE VANDAAN?

KLASWERK

1. Ons noem die versameling natuurlike getalle N, en ons skryf die versameling so neer: $N = \{ 1 ; 2 ; 3 ; \ldots \}$

1.1 As jy enige twee natuurlike getalle bymekaartel, is jou antwoord altyd weer ’n natuurlike getal? Hoe sal jy te werk gaan om iemand te oortuig dat dit wel so is?

1.2 Vermenigvuldig enige twee natuurlike getalle. Is die antwoord ook altyd ’n natuurlike getal?

1.3 Trek nou enige natuurlike getal van enige ander natuurlike getal af. Beskryf al die moontlike soorte antwoorde wat jy kan verwag. Probeer neerskryf hoekom dit gebeur.

2. Om voorsiening te maak vir die antwoorde wat jy in 3.1 teëgekom het, moet ons die getallestelsel uitbrei na die heelgetalle, wat die natuurlike getalle insluit. Hulle word voorgestel deur die simbool Z en hier is een manier om hulle neer te skryf: $Z = \{ 0 ; \pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \ldots \}$

2.1 Voltooi die volgende definisies deur neer te skryf wat in die hakies moet kom:

- Telgetalle $N_0 = \{$.........................$\}$
- Heel getalle $Z = \{$........................$\}$ op ’n tweede manier!

3. As jy enige heelgetal deur enige ander heelgetal

(behalwe 0) deel, kry jy altyd weer ’n heelgetal?Om voorsiening te maak vir hierdie antwoorde, moet ons die getallestelsel weer uitbrei; hierdie keer na die rasionale getalle:

3.1 *Q* (rasionale getalle) is al die getalle wat geskryf kan word in die vorm ab waar *a* en *b* heeltallig is, en b nie ’n nul is nie. Verduidelik baie mooi waarom *b* nie nul mag wees nie.

4. *Q*` (irrasionale getalle) is al die getalle wat nie as ’n breuk geskryf kan word nie, en dus nie in *Q* is nie. As ’n mens *Q* en *Q*` saamvoeg dan kry jy die reële getalle, *R*.

4.1 Skryf neer wat jy dink in die versameling *R*` is. Ons noem hulle nie-reëel.

einde van KLASWERK

Knoopskrif is dikwels in die antieke tyd in verskeie wêrelddele gebruik. Dit was ’n manier om goed, veral getalle, te onthou deur knope te maak in ’n tou. Die gebruike wissel vanaf eenvoudige stelsels waar een knop een item voorgestel het, tot ingewikkelde maniere om van plekwaardes gebruik te maak. Deur verskillende kleure tou te gebruik, kan meer as een stelsel getalle saam voorgestel word. Die Inkas se naam vir hierdie stelsel was *quipu*.

HUISWERKOPDRAG

1. Die tabel bevat nie ’n nul nie. Hoe belangrik is dit dat ons ’n nul moet hê? Dink aan al die goed wat ons nie sal kan doen sonder ’n nul nie.

2. Vind uit wat die naam is vir die versameling getalle wat jy sal kry as jy R en R` saamvoeg. Kan jy enigiets meer van hulle sê?

3. Ontwerp jou eie stel natuurlike getalsimbole soos dié in die vorige tabelle. Vul hulle in en wys hoe jy enige getal kan skryf met jou simbole. Dink nou nuwe tekens uit om + en – en × en □ te vervang, en maak dan ’n paar sommetjies om jou werk duidelik te maak.

einde van HUISWERKOPDRAG

VERRYKINGSOPDRAG

Maak kennis met rasionale getalle

- Bevestig die volgende antwoorde op jou eie sakrekenaar:
- Onthou om die berekenings in die regte volgorde te doen.

1. 2 + 3 □ 100 + 1 + 1 □ 10 = 3,013

Is 3,013 ’n rasionale getal? Ja, want ons kan so maak:

3,013 = 31+131 000 = 3 0001 000+131 000 = 3 000+131 000 = 3 0131 000

Jy kan dit maklik sommer direk neerskryf. Skryf neer presies wat die metode is.

2. 3 + 2 □ 3 – 1 + 1 □ 3 = 2,333 . . . = $2,\dot{3}$ Dis ook ’n rasionale getal:

Stel x = 2,333 . . .

□ 10x = 23,333 . . .

Trek af: 9x = 21

□ x=219

3. 6 + 9 □ 22 – 2 + 3 □ 11 = 4,1363636 . . . = $4,1\dot{3}\dot{6}$

Is $4,1\dot{3}\dot{6}$ ’n rasionale getal? Ja, maak so:

Stel x = 4,1363636 . . . □10x = 41,3636 . . . en □1000x = 4136,3636 . . .

Trek nou die laaste twee af: 1000x – 10x = 4136,3636 . . . – 41,3636 . . .

□ 990x = 4095 Los op: x=4095990=9122

Maklik, nè?

4. Maar ons kan slegs *eindige* desimale breuke en *repeterende* desimale breuke in die vorm ab skryf.

4.1 Hier volg 'n paar irrasionale getalle (wat sê jou sakrekenaar?):

π 2113 3,030030003000030…

4.2 Hierdie drie is egter NIE irrasionaal nie.

Verduidelik waarom nie: 22725273

4.3 Skryf die volgende getalle in die vorm ab:

4.3.1 1,553

4.3.2 0,56˙

4.3.3 30,341 {3˙41˙

4.3.4 2,427 {2˙7˙

einde van VERRYKINGSOPDRAG

Hoe werk 'n mens akkuraat?

KLASOPDRAG

1. Vereenvoudig die getalle by elke vraag,indien nodig, en vul die gegewe getalle in op die beste plekke op die gegewe getallelyn.

1.1 6 ; 2 ; 4 ; 1 ; 5+2 ; 9–1 ; 3,0 ; 0,00 ; 5,0000

0 8

1.2 2 ; 5 ; –3 ; –4 ; 3–3 ; –1

–5 5

1.3 $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{2}$; 0,2+1 ; 1,75 ; 0,666 ; 1,000

0 2

1.4 $\frac{14}{2}$; $-\frac{5}{2}$; $\frac{3}{2}-12$; 5,55 ; $-8+\frac{7}{5}$; –2,5 ; –5,5

1.5 $\sqrt{9}$; $-\sqrt{9}$; $\sqrt{36}-1$; $\sqrt{1}$; $-\sqrt{4}$; $\frac{\sqrt{16}}{2}$; $\sqrt{\frac{9}{4}}$; $\sqrt{0}$

–10 10

1.6 $\sqrt{4}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{16}$; $\sqrt{25}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{20}+1$

0 8

einde van KLASOPDRAG

VERRYKINGSOPDRAG

Ongelykhede – woorde vertaal in wiskunde

1. Die getallelyn sê iets baie belangriks vir ons: enige getal wat *links* van ’n ander getal op die getallelyn lê, is kleiner as die ander een. As ’n getal *regs* van ’n ander getal lê, is hy groter as die ander getal.

Byvoorbeeld op die getallelyn is 4,5 links van 10, dus is 4,5 kleiner as 10. So word dit wiskundig geskryf: $4{,}5 < 10$.

- –3 is links van 5, dus is –3 kleiner as 5. In wiskundige taal: $-3 < 5$
- 6 is regs van 0, dus is 6 groter as 0 en ons skryf: $6 > 0$ of $0 < 6$, want 0 is kleiner as 6.

Watter getalle is dan gelyk aan mekaar? Sekerlik 6 □ 3 en 4 ! Dus: 6 □ 3 = 4.

1.1 Gebruik < of > of = tussen die volgende pare getalle, sonder om die twee getalle om te ruil:

5,6 en 5,7

$3 + 9$ en 4×3

–1 en –2

3 en –3

273 en 15

2. Ons gebruik dieselfde tekens as ons met veranderlikes (soos x of y, ens.) werk in plaas van met konstantes.

As ons byvoorbeeld van al die getalle groter as 3 wil praat, dan kan ons x gebruik vir *al* daardie getalle (daar is natuurlik ontelbaar baie van hulle: 3,1 en 3,2 en 3,34 en 6 en 8 en 808 en 1 000 000 ens). Dan is dit: $x > 3$.

- Al die getalle kleiner as 0: $x < 0$. Soos: –1 en –

1,5 en –3,004 en –10 ens.

- Getalle groter of gelyk aan 6: $x \geq 6$. Skryf vyf van hulle neer.
- Al die getalle kleiner of gelyk aan –2: $x \leq -2$. Gee drie voorbeelde.

2.1 Gebruik die veranderlike *y* en skryf ongelykhede vir die volgende beskrywings:

Al die getalle groter as –13,4

Al die getalle kleiner of gelyk aan π

3. Ons brei die gedagte verder uit:

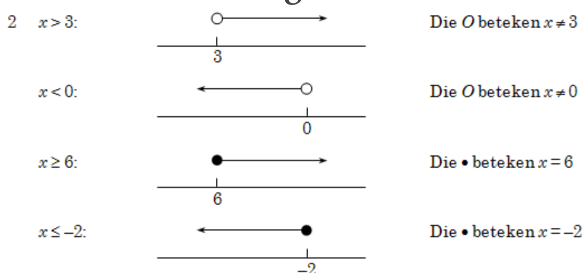
- Al die getalle tussen 4 en 8: $4 < x < 8$. Ons kan ook sê: *x* lê tussen 4 en 8.
- Getalle groter as –3 en kleiner of gelyk aan –0,5: $-3 < x \leq -0{,}5$.
- *A* is groter of geluk aan 16 en kleiner of gelyk aan 30: $16 \leq A \leq 30$.

Dit die beste om die getalle in die volgorde te skryf soos hulle op die getallelyn voorkom, naamlik die klein getal links en die grote regs. Dan kies jy net óf $<$ óf $\leq$.

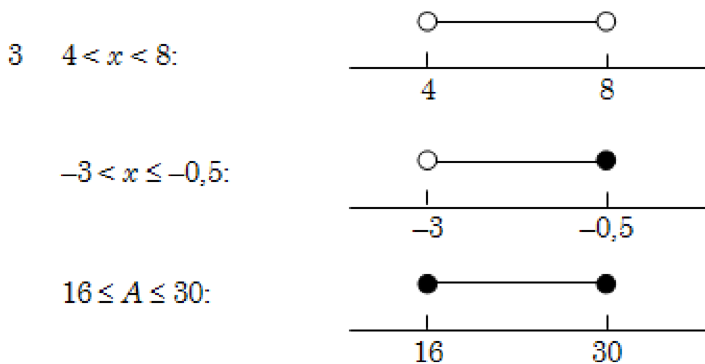
3.1 Skryf drie beskrywings in woorde, en dan skryf jy en 'n maat mekaar se sinne as ongelykhede.

Ongelykhede – grafiese voorstellings

- Ons gebruik weer voorbeelde 2 en 3 hierbo, maar nou teken ons diagramme.



2.1 Teken self die diagramme vir die twee vrae.



3.1 Teken weer jou eie diagramme.

einde van VERRYKINGSOPDRAG

GROEPOPDRAG

1. NOU MAG SAKREKENAARS NIE GEBRUIK WORD NIE – MOENIE SOMME MAAK NIE. MAAK 'N SKATTING (DIE BESTE WAT JY KAN) EN VUL DAN JOU SKATTING AS ANTWOORD IN. Hierdie opdrag werk net soos die vorige; maar elkeen moet sy eie geskikte getallelyn teken en dan die gegewe

waardes daarop invul. Vir elke getal moet elkeen eers alleen werk, en dan besluit die groep saam wat die beste antwoord is. Hierdie antwoord word dan op die groep se getallelyn ingevul. Hierdie groeppoging word ingehandig om nagesien te word.

1.1 –8 ; 12 ; 5–11 ; 4 + 0 – 412 ;
369 + 124 + 2211 + 1 ; 814 ; 4 + 9 ; 6 + 1 ; 273

1.2 2.5 – ½ ; 13 ; 113 ; 56 – 26 ; 0,5 ; 0,05 ; 0,005

1.3 3 ; 3,5 ; 3,14 ; 22 ÷ 7 ; 355 ÷ 113 ; π

einde van GROEPOPDRAG

- Hierdie taak word volgens die volgende assesseringskaal beoordeel:

VAARDIGHEID	nie bemeester 1	gedeeltelik bemeester 2	voldoende bemeester 3	uitstekend bemeester 4
Skatting korrek				
Rangskikking in volgorde				
Spasiëring korrek				

KLASWERK

1. Natuurlik kan 'n mens enige getal op baie maniere neerskryf:

- 4 en 8 □ 2 en 1 + 3 en 6 – 2 en 16 en 2 × 2 is dieselfde getal!
- 0,5 en 510 en 918 en 50100 en 14 en 416 is dieselfde.

1.1 Is 1 □ 3 gelyk aan $1{,}\dot{3}$? Wat van $1{,}3\dot{3}$? En 1,33 of 1,333 of 1,3?

1.2 Is 5 dieselfde as 2,2? Of 2,24? Of 2,236? Of 2,2361? Of dalk 2,2360? Bespreek.

1.3 Is 3 en 3,5 en 3,14 en 22 ÷ 7 en 355 ÷ 113 dieselfde as π ? Neem 'n besluit.

2. Ons kan nie elke keer 3,14159265358979323846 26 . . . neerskryf as ons van π gebruik wil maak nie. Waarom nie?

As ek moet neerskryf *presies* wat π is, dan moet ek π skryf! Die ander getalle in vraag 1.3 is net *ongeveer* gelyk aan π. Maar as ek π in 'n berekening moet gebruik en 'n antwoord gee, dan moet ek korrek kan **afrond**.

So lyk π as dit afgerond word tot verskillende *grade van akkuraatheid*:

1 desimale plek: 3,1

2 desimale plekke: 3,14

3 desimale plekke: 3,142

4 desimale plekke: 3,1416

5 desimale plekke: 3,14159

6 desimale plekke: 3,141593

- Maak *nou* seker dat jy presies weet hoe om getalle korrek af te rond.

3. Vereenvoudig en rond die volgende waardes af, korrek tot die aantal desimale plekke wat in die hakies gegee word.

3.1 3,1 □ 3 (2) 3.2 2 $\times$ 2 2) 3.3 5 $\times$ π (2)

3.4 4,5 $\times$ 7 (0) 3.5 1,000008 + 25 □ 10000 (1)

einde van KLASWERK

KLASWERK

1.1 Hoeveel ure is daar in 17 weke? 24 $\times$ 7 $\times$ 17 = 2 856 uur

1.2 Hoeveel minute is daar in 'n week? 60 $\times$ 24 $\times$ 7 = 10 080 minute

1.3 Is dit net so maklik om te bereken hoeveel ure daar in 135 maande is? Bespreek die vraag in ’n groep en besluit watter probleme ons moet oplos voor ons die som kan maak.

1.4 Hoeveel jare is daar in 173 maande? 173 □ 12 $= 14{,}4166\ \dot{6} \approx 14{,}42$ jaar

- Die $\approx$ teken beteken “benaderd gelyk aan” en word partymaal gebruik om aan te toon dat die waarde afgerond is. Dit word nie baie gebruik nie, maar dis ’n goeie gewoonte.

2. Waarom word daar in vraag 1.1 en vraag 1.2 *vermenigvuldig*, en in vraag 1.4 *gedeel*?

3. Hoeveel sekondes is daar in ’n eeu? Dit gaan dalk ’n rukkie neem voor jy ’n antwoord het! Hoe sal jy weet of jou antwoord betroubaar is?

4.1 Daar is eenduisend meter in ’n kilometer, dus kan ons sê dat een meter gelyk is aan 0,001 kilometer. Een meter = 1 □ 1 000 kilometer of 1 m $= 11000\text{km}$

4.2 Daar is een duisend millimeter in ’n meter: 1 mm $= 11000 \times 1000\text{km} = 0{,}000\ 001$ km

4.3 Daar is een duisend mikrometer in ’n millimeter: 1 µm $= 0{,}000\ 000\ 001$ km. (µ is ’n Griekse letter – mu.)

5. Net soos ons baie groot getalle meer gerieflik in *wetenskaplike notasie* geskryf het, skryf ons baie klein getalle ook in wetenskaplike notasie. Hier volg 'n klompie voorbeelde van beide. Maak seker dat jy kan omskakel van gewone getalle na wetenskaplike notasie en andersom. Sakrekenaars maak ook van 'n soort wetenskaplike notasie gebruik. Hulle verskil en jy moet dus seker maak dat jy verstaan hoe jou eie sakrekenaar baie groot of klein getalle hanteer.

5.1 1 µm = 0,000 000 001 km Dus is 1 µm = $1{,}0 \times 10^{-9}$ km

- Die definisie van 'n *ligjaar* is die afstand wat lig in een jaar aflê. Omdat lig so vinnig beweeg, is dit 'n baie groot afstand. 'n Ligjaar is ongeveer $9{,}46 \times 10^{12}$ km. Skryf hierdie waarde in gewone notasie.
- 'n Elektron se massa is ongeveer 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 91 g . Hoe lyk hierdie getal in wetenskaplike notasie?

5.2 Die materiaal van 'n gewone laken het ongeveer drie drade per millimeter, beide kruis en dwars. Neem aan dat 'n dubbelbedlaken 2 × 2 vierkante meter groot is. Dit beteken dat daar $6{,}0 \times 10^{3}$ drade kruis en $6{,}0 \times 10^{3}$ drade dwars is. Dit is . . . .(vul in) drade in totaal – elk ongeveer 2 m lank. Bereken nou hoeveel kilometer drade daardie laken bevat. Meet vanaand jou kussingsloop en maak dieselfde berekening daarvoor.

5.3 Daar is ongeveer 1×10^{-5} liter water in ’n gemiddelde reëndruppel. Op party plekke in Suid Afrika reën dit ongeveer 1 meter per jaar. Op een hektaar is dit ongeveer 1×10^{12} druppels per jaar. Op ’n groterige stad is dit omtrent 6×10^{16} reëndruppels per jaar – ongeveer 1×10^{7} druppels vir elke man, vrou en kind op aarde. Hoeveel liter elk is dit?

5.4 Bereken: (laat antwoorde in wetenskaplike notasie)

5.4.1 $3{,}501 \times 10 - 59{,}5 \times 10 - 8 + 4{,}3 \times 10 - 11$ 5.4.2 $3{,}5 \times 106 + 1{,}4 \times 10 - 173{,}5 \times 106 - 1{,}4 \times 10 - 17$

einde van KLASWERK

Ons gebruik voorvoegsels wat meestal uit Grieks en Latyn kom om eenhede name te gee. Die standaardeenheid van lengte is een *meter*. As ons van tien meter praat, kan ons daardie lengte een dekameter noem; honderd meter is ’n hektometer en, natuurlik, ’n duisend meter is ’n kilometer. Een tiende van ’n meter is ’n desimeter; een honderdste van ’n meter is ’n sentimeter en een duisendste van ’n meter is ’n millimeter. Daar is nog ander voorvoegsels – kyk hoeveel van hulle jy kan opspoor.

Jou rekenaarvriende sal hopelik kan bevestig dat in rekenaartaal ’n “kilobyte” in werklikheid 1 024 “bytes” is. (Die Afrikaanse woord vir “byte” is *greep*

– dus is ’n kilobyte eintlik ’n kilogreep.) Nou, hoekom is dit 1 024 grepe en nie 1 000 grepe nie? Die antwoord lê opgesluit in die feit dat rekenaars in die binêre stelsel werk en nie, soos ons, in die desimale stelsel nie. Snuffel die antwoord self uit.

Assessering

Leeruitkomstes(LUs)
LU 1
Getalle, Bewerkings en VerwantskappeDie leerder is in staat om getalle en die verwantskappe daarvan te herken, te beskryf en voor te stel, en om tydens probleemoplossing bevoeg en met selfvertroue te tel, te skat, te bereken en te kontroleer.
Assesseringstandaarde(ASe)
Ons weet dit as die leerder:
1.1 die historiese ontwikkeling van getallestelsels in ’n verskeidenheid historiese en kulturele kontekste (insluitend plaaslik) kan beskryf en illustreer;
1.2 rasionale getalle (insluitend baie klein getalle in wetenskaplike notasie) herken, gebruik en kan voorstel en gemaklik tussen ekwivalente vorms in geskikte kontekste kan beweeg;

1.3 probleme in konteks kan oplos, insluitend kontekste wat gebruik kan word om bewustheid by leerders te onwikkel van ander leerareas sowel as van menseregte, sosiale, ekonomiese en omgewingskwessies soos:

1.3.1 finansiële kontekste (insluitend wins en verlies, begrotings, rekeninge, lenings, enkelvoudige en saamgestelde rente, huurkoop, wisselkoers, kommissie, verhuring en die bankwese);

1.3.2 metings in die konteks van Natuurwetenskappe en Tegnologie;

1.4 probleme oor verhouding, koers en eweredigheid (direkte en omgekeerde) oplos;

1.5 skat en bereken deur geskikte bewerkings vir probleme te kies en te gebruik en die redelikheid van resultate te beoordeel (insluitend meetprobleme wat rasionale benaderings van irrasionale getalle behels);

1.6 ’n verskeidenheid tegnieke en instrumente (insluitend tegnologie) gebruik om berekeninge doeltreffend en met die nodige mate van akkuraatheid te doen, insluitende die volgende reëls en betekenisse van eksponente (leerders behoort in staat te wees om hierdie reëls en betekenisse slegs in berekeninge te gebruik):

1.6.1 $x^n \times x^m = x^{n+m}$

1.6.2 $x^n \div x^m = x^{n-m}$

1.6.3 $x^0 = 1$

1.6.4 $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

1.7 die eienskappe van rasionale getalle herken, beskryf en gebruik.

Memorandum

TOETS: GETALLESTELSELS DATUM:NAAM:

Aan watter versameling (s) behoort elke getal? Vereenvoudig die getalle, indien nodig, en voltooi dan die tabel deur kruisies onder alle gepaste kolomopskrifte te maak.

	VEREENVOUDIG	N	N_0	Z	Q	Q'	R	R'
$-\sqrt{9}$								
5								
$\frac{355}{113}$								
$-\sqrt{11}$								
$\sqrt{-16}$								
$-18+22$								
0								
$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}$								
$\frac{3}{4}$								
$1+\sqrt{10}$								
-25								
$-12 \div 2$								
$\frac{\sqrt{5}}{5}$								
$4-\sqrt{16}$								

TOETS – Memorandum

	VEREENVOUDIG	N	N_0	Z	Q	Q'	R	R'
$-\sqrt{9}$	-3			x	x		x	
5		x	x	x	x		x	
$\frac{355}{113}$					x		x	
$-\sqrt{11}$						x	x	
$\sqrt{-16}$								x
$-18+22$	4	x	x	x	x		x	
0			x	x	x		x	
$\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$					x	x	
$\frac{3}{4}$					x		x	
$1+\sqrt{10}$						x	x	
-25				x	x		x	
$-12 \div 2$	-6			x	x		x	
$\frac{\sqrt{5}}{5}$						x	x	
$4-\sqrt{16}$	0		x	x	x		x	

Memoranda

KLASOPDRAG

1.1 Ja; enige informele “bewys” is aanvaarbaar.

1.2 Soos 1.1

1.3 Nou kom nul en negatiewe getalle te voorskyn. Die verduideliking is nie ter sake nie – slegs die feit dat die leerder daaroor dink.

2.1 N_0 = {0 ; 1 ; 2 ; . . . } en Z = { . . . –3 ; –2 ; –1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; . . .}

3 Nou kom breuke ook te voorskyn. Maak duidelik dat heelgetalle ook as breuke geskryf kan word, en dat dit dikwels handig is om dit so te doen.

4.1 Nie alle leerders sal hier sukses behaal nie. *R*` is die antwoorde wat ons kry as ons die vierkantswortel (onder andere) van 'n negatiewe getal neem.

TAAK

2. Wys leerders daarop dat nul ontbreek uit die tabel.

HUISWERKOPDRAG

1. Beklemtoon dat nul benodig word:

Die konsep van plekwaardes is streng afhanklik van die waarde nul.

Dit skei negatiewe en positiewe getalle.

Dit stel “niks” voor.

Dit word algebraïes gedefinieer as $a + (-a)$.

Mens kan hier vertel dat die gedagte en simbolisering van nul uit die Ooste gekom het.

2. Komplekse getalle – nie veel kan van die meeste leerders verwag word nie.

As die simbool i gebruik word vir -1, dan kan ons nie-reële getalle as volg voorstel: $-12 = 2-3 = 23\times -1 = 23-1 = 23\text{i}$

$3 + 5i$ en $2{,}5 - 16i$ is voorbeelde van nie-reële getalle, en hulle bestaan uit twee dele elk: ‘n reële deel en ‘n nie-reële deel. Die belangrikste gevolge hiervan is dat die rekenkundige bewerkings versigtig benader moet word, en dat hierdie getalle nie in volgorde gerangskik kan word nie!

3. Enige redelike antwoord kan aanvaar word. Dit sal dalk goed werk as die leerders mekaar se getallestelsels beoordeel.

VERRYKINGSOPDRAG

As daar geleentheid is, kan hierdie werk met ‘n sterk klas deurgewerk word.

4.1 Nie-repeterend; alhoewel 3,03003000300003… ‘n patroon het, repeteer hy

nie!

4.2 Beklemtoon dat die eerste een NIE gelyk is aan π nie. Die ander twee moet ordentlik vereenvoudig word.

4.3.1 15531000

4.3.2 5190

4.3.3 30311999

4.3.4 2403990

KLASOPDRAG

Hierdie oefening is bedoel om die leerders meer insig te gee in onvereenvoudigde waardes sodat hulle kan begin skat wat die groottes is. Die belangrikste werk is om die vereenvoudigings reg te doen. Daarna moet die waardes ten minste in die regte volgorde gerangskik word. As die spasies tussen die getalle redelik in verhouding is, is dit 'n bonus. Die volgorde word hier aangedui:

1.1: 0,00 ; 1 ; 2 ; 3,0 ; 4 ; 5,0000 ; $5+2$; 6 ; 9–1

1.2: –4 ; –3 ; –1 ; 3–3 ; 2 ; 5

1.3: 15 ; 14 ; 0.666 ; 23 ; 22 ; 1,000 ; $0,2+1$; 1.75

1.4: $32-12$; $-8+75$; –5,5 ; -52 ; –2,5 ; 5,55 ;

1.5: -9 ; -4 ; 0 ; 1 ; 94 ; 162 ; 9 ; 36–1

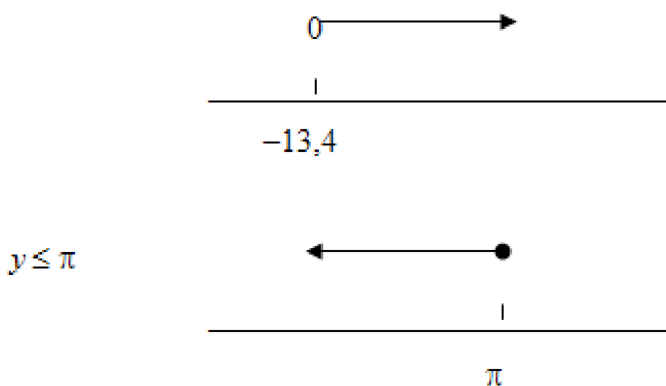
1.6: 4 ; 6 ; 9 ; 16 ; 25 ; 20 + 1 ; 32 ; 36

VERRYKINGSOPDRAG

1.1: 5,6 $<$ 5,7

3 + 9 = 4 × 3 –1 > –2 3 > –3 273 < 15

2.1: $y > -13{,}4$



GROEPOPDRAG

Hier word vereenvoudigde waardes in die oorspronlike volgorde gegee:

1.1 –8 ; 12 ; –6 ; 2 ; 10 ; 3 ; 5 ; 3,44… ; 3

1.2 2 ; 0,3… ; 1,3… ; 0,5 ; 0,5 ; 0,05 ; 0,005

1.3 3 ; 3,5 ; 3,14 ; 3,142857… ; 3,1415929… ; 3,1415926… (die laaste is π)

Hier is die waardes in die korrekte volgorde:

1.1 –8 ; –6 ; 2 ; 3 ; 3,44… ; 5 ; 10 ; 12

1.2 0,005 ; 0,05 ; 0,3… ; 0,5 ; 1,3… ; 2

1.3 3 ; 3,14 ; π ; 3,1415929… ; 3,142857…

KLASWERK

Hierdie oefening is ontwerp om ‘n gevoel vir die gevolge van afronding (benaderde antwoorde) te ontwikkel. Dikwels vertrou leerders hulle sakrekenaarantwoorde sonder om enige dinkwerk te doen.

1.1 Dit gaan om die notasie sowel as die aantal desimale plekke.

1.2 Net soos 1.1

1.3 Beklemtoon weereens dat benaderings tot π nie *gelyk* is aan π nie.

Bespreek gerus die term “benaderd gelyk aan”.

3. Antwoorde: 1,03 ; 2,83 ; 15,71 ; 12 ; 1,0 (die nul moet daar wees).

KLASWERK

Baie leerders vind omskakelings moeilik – hier sal dalk heelwat hulp en raad nodig wees.

1.3 Nie alle maande is ewe lank nie; dus sal eenvoudige vermenigvuldiging nie die beste antwoord gee nie. Die belangrikste is om uit te vind watter maande ter sprake is – en moenie van skrikkeljare vergeet nie!

1.4 Hoekom is daar deling ter sprake? Help om strategieë te ontwikkel.

3. Dieselfde probleme as by 1.3 kon na vore. Die antwoord kan wel benader word. Verduidelik hoekom dit aanvaarbaar is. Hierdie antwoord is ‘n motivering om binnekort van wetenskaplike gebruik te maak: ≈ 3 157 056 000 sekondes.

5.1 $9{,}1 \times 10^{28}$ 5.2 24 km 5.3 100 liter

Maak wiskunde makliker met eksponente

WISKUNDE

Graad 9

GETALLE

Module 2

MAAK WISKUNDE MAKLIKER MET EKSPONENTE

KLASWERK

- Onthou jy nog hoe eksponente werk? Skryf neer wat “drie tot die mag sewe” beteken. Wat is die grondtal? Wat is die eksponent? Kan jy mooi verduidelik wat ’n mag is?
- Hierdie deel het baie voorbeelde met getalle; gebruik jou sakrekenaar om hulle uit te werk sodat jy vertroue in die metodes kan ontwikkel.

1. DEFINISIE

$2^3 = 2 \times 2 \times 2$ en $a^4 = a \times a \times a \times a$ en $b \times b \times b = b^3$

ook

$(a+b)^3 = (a+b) \times (a+ b) \times (a+b)$ en $23^4 = 23 \times 23 \times 23 \times 23$

1.1 Skryf die volgende uitdrukkings in uitgebreide vorm:

4^3 $(p+2)^5$ a^1 $(0{,}5)^7$ $b^2 \times b^3$

1.2 Skryf hierdie uitdrukkings as magte:

$7 \times 7 \times 7 \times 7$ $y \times y \times y \times y \times y$ $-2 \times -2 \times -2$ $(x+y) \times (x+y) \times (x+y) \times (x+y)$

1.3 Antwoord sonder om dit uit te werk: Is $(-7)^6$ dieselfde as -7^6 ?

- Gebruik nou ’n sakrekenaar en kyk of die twee

waardes dieselfde is.

- Vergelyk ook die volgende pare deur eers te raai wat die antwoord gaan wees, en dan met jou sakrekenaar te kyk hoe goed jy geskat het.

-5^2 en $(-5)^2$ -12^5 en $(-12)^5$ -1^3 en $(-1)^3$

- Jy behoort nou 'n goeie idee te hê hoe hakies antwoorde beïnvloed – skryf dit neer sodat jy dit sal onthou en in die toekoms kan gebruik wanneer die probleme moeiliker word.

- Ons som hierdie deel op in 'n definisie:

$a^r = a \times a \times a \times a \times \ldots$ (daar moet *ra*'s wees, en *r* moet 'n natuurlike getal wees)

- Van nou af moet jy die belangrikste magte begin memoriseer:

$2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^4 = 16$; ens. $3^2 = 9$; $3^3 = 27$; $3^4 = 81$; ens. $4^2 = 16$; $4^3 = 64$; ens.

Die meeste eksponentsomme moet sonder 'n sakrekenaar gedoen word.

2 VERMENIGVULDIGING

- Onthou jy nog dat $g^3 \times g^8 = g^{11}$? Kernwoorde: vermenigvuldig; dieselfde grondtal

2.1 Vereenvoudig: (moenie uitgebreide vorm gebruik nie).

$7_7 \times 7_7$ $(-2)_4 \times (-2)_{13}$ $(\frac{1}{2})_1 \times (\frac{1}{2})_2 \times (\frac{1}{2})_3$ $(a+b)_a \times (a+b)_b$

- Ons vermenigvuldig magte met enerse grondtalle volgens hierdie reël:

$a_x \times a_y = a_{x+y}$ook = axay = ayaxax + y, bv. 814 = 84 × 810

3. DELING

- 4642 = 46 − 2 = 44 is hoe dit werk. Kernwoorde: deel; dieselfde grondtal

3.1 Probeer hierdie: a6ay323321a + bpa + b12a7a7

- Die reël wat ons gebruik vir deling van magte is: axay = ax − y.

Ookax − y = axay, bv. a7 = a20a13

4. VERHEFFING VAN ’n MAG TOT ’n MAG

- bv. 324 = 32 × 4 = 38.

4.1 Doen die volgende:

$(a^a)^5$; $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^7\right)^5$; $(0,4^a)^b$; $(x^a)^a$; $(6^5)^{(a-1)}$

- Die reël werk so: axy = axyookaxy = axy = ayx, bv. 618 = 663

5. DIE MAG VAN ’n PRODUK

- So werk dit:

$(2a)^3 = (2a) \times (2a) \times (2a) = 2 \times a \times 2 \times a \times 2 \times a = 2 \times 2 \times 2 \times a \times a \times a = 8a^3$

- Dit word gewoonlik in twee stappe gedoen, nl.: $(2a)^3 = 2^3 \times a^3 = 8a^3$

5.1 Doen self hierdie: $(4x)^2$ $(ab)^6$ $(3 \times 2)^4$ $(\frac{1}{2} x)^2$ $(a^2b^3)^2$

- Dis duidelik dat die eksponent aan elke faktor in die hakies behoort.
- Hier is die reël: $(ab)^x = a^x b^x$ookapbp = abb bv. 143 = 2 × 73 = 2373en32 × 42 = 3 × 42 = 122

6. DIE MAG VAN ’n BREUK

- Dis baie dieselfde as die mag van ’n produk. ab3 = a3b3

6.1 Doen hierdie, maar wees versigtig: 23p − 223x2y32a − xb − y − 2

- Weer behoort die eksponent aan beide die teller en die noemer.
- Die reël: abm = ambmenambm = abmbv.

233 = 2333 = 827ena2xbx = a2xbx = a2bx

einde van KLASWERK

TUTORIAAL

- Pas hierdie reëls saam toe om die volgende uitdrukkings te vereenvoudig — sonder ’n sakrekenaar.

1. a5a7aa8

2. x3y4x2y5x4y8

3. a2b3c2ac22bc2

4. a3b2a3ab5b4ab3

5. 2xy × 2x2y42x2y32xy3

6. 23 × 22 × 278 × 4 × 8 × 2 × 8

einde van TUTORIAAL

Nog ’n paar reëls

KLASWERK

1 Beskou hierdie geval: = a5 − 3 = a2a5a3

- Bespreek nou hierdie twee probleme en maak nog twee reëls vir hierdie gevalle.

1.1 a3a3

1.2 a3a5

2. AS DIE EKSPONENT NUL IS

- Die antwoord van 1.1 is a^0 as ons die reël vir deling toepas.
- Ons weet egter goed dat die antwoord 1 moet wees, omdat ons teller en noemer dieselfde is.
- Dus kan ons sê dat *enige uitdrukking* met 'n eksponent wat nul is, gelyk aan 1 moet wees.
- Die reël sê: $a^0 = 1$ ook $1 = a^0$. 'n Paar voorbeelde:

$3^0 = 1$ $k^0 = 1$ $(ab^2)^0 = 1$ $(n+1)^0 = 1$
a3bab220=1 en

$1 = (\text{enigiets})^0$ m.a.w. ons kan 'n 1 verander in iets wat ons pas, indien nodig!

3. AS DIE EKSPONENT NEGATIEF IS

- Kyk nou na vraag 1.2. Die antwoord is a^{-2} . Maar wat beteken dit?
- a3a5=aaaaaaaa=1aa=1a2. Dus is die reël: a −x=1ax en andersom.
- Van nou af probeer ons om sover moontlik antwoorde slegs met positiewe eksponente te skryf.
- Ons kan ook sê: 1a−x=ax en andersom. Hier is belangrike voorbeelde:

ab 2 c − 3 = ab 2 c 3

2 x − m y = 2y x m
a 2 b − 5 a − 3 b 5 = a 2 a 3 b 5 b 5 = a 5 b 10

einde van KLASWERK

HUISWERKOPDRAG

- Vereenvoudig sonder ’n sakrekenaar en laat antwoorde sonder negatiewe eksponente.

1. x3y232x2y2xy4

2. x43xy26x2x3y2x7y3 × 4x2y42y

3. 5x3 − 53x

4. 2a2b5c3d22abc2d34abcd32

5. 6x2y22xy33x43xy

6. 2a23 + 12a30 − 8a6

7. x3y − 43 − 1x2y − 1 − 32xy32

einde van HUISWERKOPDRAG

KLASWERK

- Kom ons maak net gou seker dat ons veranderlikes met getalwaardes kan vervang.

1. Om die omtrek van ’n reghoek (sylengtes 17 cm en 13,5 cm) te bereken, gebruik ons die gewone formule:

- Omtrek = 2 [lengte + breedte]

- Maak eers hakies vir die veranderlikes: = 2 [( ) + ( )]
- Vul nou die waardes in: = 2 [(17) + (13,5)]
- Verwyder hakies en vereenvoudig = 2 [17 + 13,5]volgens gewone reëls: = 2 × 20,5
- Onthou die eenhede (indien daar is): = 41 cm

2. Wat is die waarde van x3y4x2y5x4y8 as $x = 3$ en $y = 2$?

- Daar is twee moontlikhede, vervang eers en vereenvoudig daarna *of* vereenvoudig eers en vervang daarna. Hier is albei metodes:

x3y4x2y5x4y8 = 33×24×32×2534×28 = 27×16×9×3281×128 = 3 × 2 = 6

x3y4x2y5x4y8 = x3x2y4y5x4y8 = x5y9x4y8 = x5−4y9−8 = $x \times y$ = (3) × (2) = 6

- Sonder foute sal die antwoorde eners wees.

3.1 Watter metode is volgens jou mening die maklikste en hoekom sê jy so?

3.2 Bereken die omtrek van ’n vierkant met sylengte

6,5 cm.

3.3 Bereken die oppervlakte van ’n reghoek met sylengtes 17 cm en 13,5 cm.

3.4 As a = 5 en b = 1 en c = 2 en d = 3, bereken die waarde van: 2a2b5c3d22abc2d34abcd32.

einde van KLASWERK

Assessering

Leeruitkomstes(LUs)
LU 1
Getalle, Bewerkings en VerwantskappeDie leerder is in staat om getalle en die verwantskappe daarvan te herken, te beskryf en voor te stel, en om tydens probleemoplossing bevoeg en met selfvertroue te tel, te skat, te bereken en te kontroleer.
Assesseringstandaarde(ASe)
Ons weet dit as die leerder:
1.1 die historiese ontwikkeling van getallestelsels in ’n verskeidenheid historiese en kulturele kontekste (insluitend plaaslik) kan beskryf en illustreer;
1.2 rasionale getalle (insluitend baie klein getalle in

wetenskaplike notasie) herken, gebruik en kan voorstel en gemaklik tussen ekwivalente vorms in geskikte kontekste kan beweeg;

1.3 probleme in konteks kan oplos, insluitend kontekste wat gebruik kan word om bewustheid by leerders te onwikkel van ander leerareas sowel as van menseregte, sosiale, ekonomiese en omgewingskwessies soos:

1.3.1 finansiële kontekste (insluitend wins en verlies, begrotings, rekeninge, lenings, enkelvoudige en saamgestelde rente, huurkoop, wisselkoers, kommissie, verhuring en die bankwese);

1.3.2 metings in die konteks van Natuurwetenskappe en Tegnologie;

1.4 probleme oor verhouding, koers en eweredigheid (direkte en omgekeerde) oplos;

1.5 skat en bereken deur geskikte bewerkings vir probleme te kies en te gebruik en die redelikheid van resultate te beoordeel (insluitend meetprobleme wat rasionale benaderings van irrasionale getalle behels);

1.6 ’n verskeidenheid tegnieke en instrumente (insluitend tegnologie) gebruik om berekeninge doeltreffend en met die nodige mate van akkuraatheid te doen, insluitende die volgende reëls en betekenisse van eksponente (leerders behoort in staat te wees om hierdie reëls en betekenisse slegs in berekeninge te gebruik):

1.6.1 $x^n \times x^m = x^{n+m}$

1.6.2 $x^n \div x^m = x^{n-m}$

1.6.3 $x^0 = 1$

1.6.4 $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

1.7 die eienskappe van rasionale getalle herken, beskryf en gebruik.

LU 2

Patrone, Funksies en AlgebraDie leerder is in staat om patrone en verwantskappe te herken, te beskryf en voor te stel, en probleme op te los deur algebraïese taal en vaardighede te gebruik.

Ons weet dit as die leerder:

2.8 die eksponentwette gebruik om uitdrukkings te vereenvoudig.

Memorandum

Eksponente

TOETS

1. Wetenskaplike Notasie

1.1 Skryf die volgende waardes as gewone getalle:

1.1.1 $2{,}405 \times 10^{17}$

1.1.2 $6{,}55 \times 10^{-9}$

1.2 Skryf die volgende getalle in wetenskaplike notasie:

1.2.1 5 330 110 000 000 000 000

1.2.2 0,000 000 000 000 000 013 104

1.3 Doen die volgende berekeninge en skryf jou antwoord in wetenskaplike notasie:

1.3.1 $(6{,}148 \times 10^{11}) \times (9\ 230\ 220\ 000\ 000\ 000)$

1.3.2 $(1{,}767 \times 10^{-6})$ □ $(6{,}553 \times 10^{-4})$

2. Eksponente

Vereenvoudig en laat antwoorde sonder negatiewe eksponente.

(Moenie ‘n sakrekenaar gebruik nie.)

2.1 3a2xy3ab2x2y3 2.2 a0b0c36c2ab3c52×23a2c304abc2×18b42a3c42

3. Substitusie

3.1 Vereenvoudig: $2x^2y^3 + (xy)^2 - 4x$

3.2 Bereken die waarde van $2x^2y^3 + (xy)^2 - 4x$ as $x = 4$ en $y = -2$

4. Formules

Die formule vir die oppervlakte van ‘n sirkel is: opp. $= \pi r^2$ (r is die radius).

4.1 Bereken die oppervlaktes van die volgende sirkels:

4.1.1 ‘n Sirkel met radius = 12 cm; benader antwoord tot 1 desimale plek.

4.1.2 ‘n Sirkel met ‘n deursnit van 8 m; benader tot die naaste meter.

TOETS – Memorandum

1.1.1 240 500 000 000 000 000

1.1.2 0,000 000 006 55

1.2.1 $5,330\ 110 \times 10^{18}$

1.2.2 $1,3104 \times 10^{-17}$

1.3.1 $6,148 \times 10^{11} \times 9,23022 \times 10^{15}$

$= 6,148 \times 9,23022 \times 10^{11} \times 10^{15}$

$\approx 56,74 \times 10^{26}$

$= 5,674 \times 10^{27}$

1.3.2 $1,767 \times 10-66,553 \times 10-4 = 1,7676,553 \times 10-6-(-4) \approx 0,26 \times 10^{-2} = 2,6 \times 10^{-1}$

2.1 $3^4a^5x^7y^4 = 81a^5x^7y^4$

2.2 c3 × 2 × 18a6b4c86a2b6c12 × 4abc2 = 36a6b4c1124a3b7c14 = 3a32b3c3

3.1 $2x^2y^3 + x^2y^2 - 4x$

3.2 $2(4)^2(-2)^3 + (4)^2(-2)^2 - 4(4) = 2(16)(-8) + (16)(4) - 16 = -256 + 64 - 16 = -208$

4.1.1 opp $= \pi \times 12^2 = 452{,}38934\ldots \approx 452{,}4$ cm^2

4.1.2 opp $= \pi \times 4^2 = 50{,}26548\ldots \approx 50$ m^2

Memoranda

KLASWERK

Die leerders behoort reeds die werk in die eerste deel te ken. Diegene wat nog nie die eenvoudige eksponentwette ken nie, kan dit nou bemeester. Vir die ander dien dit as hersiening met die oog op die nuwe werk in die tweede deel.

1.1 $4 \times 4 \times 4$ $(p+2) \times (p+2) \times (p+2) \times (p+2) \times (p+2)$ ens.

1.2 7^4y^5 ens.

1.3 $(-7)^6 = 7^6$, dus $(-7)^6 \neq -7^6$ ens.

2.1 7^{14} $(-2)^{17} = -2^{17}$ ens.

3.1 a^{6-y} 3^2 $(a+b)^{p-12}a^0$

4.1 a^5a ens.

TUTORIAAL

Die tutoriaal word in die klas in stilte in ‘n beperkte tyd gedoen. Aanbeveling: Sien dit onmiddelik na – dalk kan leerders mekaar se werk nasien.

Antwoorde: 1. a^3 2. xy 3. $a^6b^8c^8$ 4. a^8b^6 5. $4x^8y^9$ 6. 1

KLASWERK

Nuwe werk vir die meeste leerders in graad 9.

HUISWERKOPDRAG

Antwoorde: 1. $18x^6y^7$

2. $24x^{11}y^3$

3. 0

4. $32a^6b^{14}c^{14}d^{11}$

5. 16x10y12

6. 1 7. 108y5x

KLASWERK

Substitusie veroorsaak heelwat probleme omdat dit so maklik lyk. Leerders wat stappe uitlaat (of nie

neerskryf nie) maak dikwels eenvoudige foute. Verplig leerders om hakies te gebruik.

2. Hulle behoort te besluit dat vereenvoudiging eers behoort te geskied – dit is immers waarom ons hulle leer om te vereenvoudig.

3.1 26 cm

3.2 229,5 cm^2

3.3 $\approx 1{,}45 \times 10^{15}$

WISKUNDE

Graad 9

GETALLE

Module 3

WAAROM IS PYTHAGORAS SO BELANGRIK?

ONDERSOEK

1.1 Werk in ’n groep, maar begin eers alleen. Trek drie reghoekige driehoeke van verskillende vorms en groottes. Werk so akkuraat moontlik. As jy op blokkiespapier werk, is dit baie makliker. Werk nou nog *meer* akkuraat en meet die drie sye van elke driehoek. Werk tot die naaste millimeter. Vul die eerste drie rye van die tabel in. Gebruik nou ’n sakrekenaar om die tabel te voltooi.

	SIMBOOL	DRIEHOEK A	DRIEHOEK B	DRIEHOEK C
Lengte van die kortste sy	a	....	....	....
Lengte van middelste sy	b	....	....	....
Lengte van die langste sy	c	....	....	....
Kwadraat van lengte van kortste sy	a^2	....	....	....
Kwadraat van lengte	b^2	....	....	....

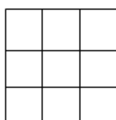
van middelste sy		
Som van die boonste twee kwadrate	$a^2 + b^2$	....
Kwadraat van lengte van langste sy	c^2	....

1.2 Daar behoort iets aan te gaan met die waardes in die gemerkte blokkies. In die groep, skryf neer presies wat julle waarneem en (as julle kan) wat die rede is.

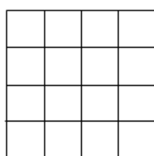
2. Neem drie lyne:

3 eenhede 4 eenhede 5 eenhede

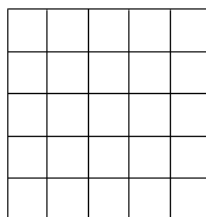
en drie vierkante:



9 eenhede²



16 eenhede²



25 eenhede²

- ’n Mens kan die drie gegewe lyne gebruik om ’n reghoekige driehoek te vorm.

Uitknipwerk:

2.1 Kan ’n mens die drie gegewe vierhoeke ook gebruik om ’n driehoek te vorm?

3. Som die uitslag van hierdie ondersoek netjies op.

einde van ONDERSOEK

Die Stelling van Pythagoras lui:

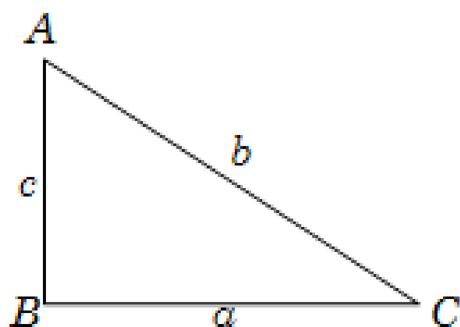
- *In ’n reghoekige driehoek is die kwadraat van die skuinssy se lengte gelyk aan die som van die kwadrate van die lengtes van die ander twee sye.*

Die belangrikheid van die Stelling van Pythagoras is dat ons dit op twee maniere gebruik: Eerstens, as ons weet dat ’n driehoek reghoekig is, dan kan ons iets belangriks sê oor die lengtes van die sye. Tweedens, as ons weet dat die drie sye van ’n driehoek die gegewe verband met mekaar het, dan moet die driehoek reghoekig wees.

KLASWERK

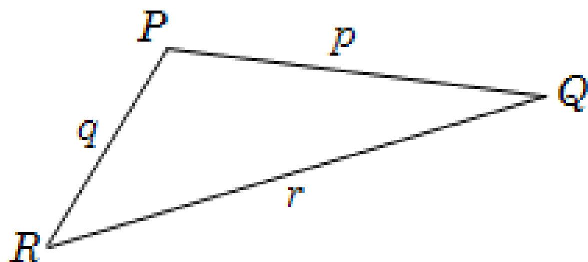
1. Ons benoem driehoeke soos volg:

- Verwys na die skets hierlangs.



- Die drie hoekpunte kry hoofletters as name. (A, B en C)
- Die sye kan benoem word as die twee hoekpuntewaartussen die sy lê (AB, BC en AC), of kleinletterskan gebruik word, dikwels dieselfde kleinletter as diehoekpunt oorkant die sy (a, b en c).

- Ons werk hier met reghoekige driehoeke, maar hierdiebenoeming werk vir ander driehoeke ook.



- Ons gebruik dieselfde letters vir *beide* die naam van 'n sy *en* vir die lengte van die sy.
- Bv. $PR = 3{,}5$ cm of $r = 5$ cm.ΔPRS beteken:

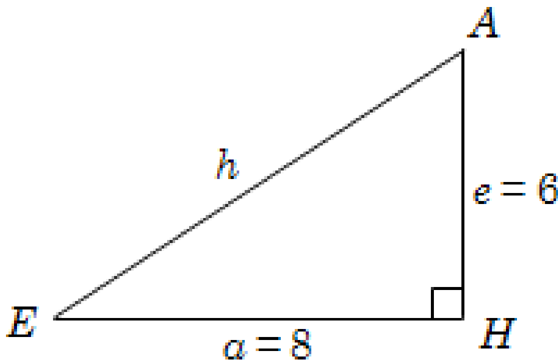
driehoek*PRS*

ONTHOU om altyd 'n liniaal te gebruik vir mooi sketse!

- In die volgende oefeninge is die eerste probleem telkens 'n voorbeeld.

2. *Probleem*: Driehoek *AEH* het 'n regte hoek by *H*.$AH = 6$ cm en $EH = 8$ cm.Maak 'n skets (nie akkuraat nie) van die driehoek engebruik die Stelling van Pythagoras om die lengte vansy *AE* te bereken.

Oplossing: Omdat ons weet dat die driehoek 'nregte hoek het, mag ons sê dat $AE^2 = AH^2 + EH^2$ (of: $h^2 = e^2 + a^2$)



Substitusie:$AH^2 + EH^2 = (6)^2 + (8)^2 = 36 + 64 = 100$ cm^2 As, dus, $AE^2 = 100$ cm^2 , dan is *AE* 10 cm.

2.1 Bereken die derde sy van die volgende driehoeke:

2.1.1 ΔDEF met □D ’n regte hoek en $e = 5$ mm en $f = 12$ mm

2.1.2 ΔXYZ met □Y ’n regte hoek en $x = 3$ cm en $y = 5$ cm.

3. *Probleem*: Wat is die lengte van die kortste sy (b) van die reghoekige driehoek ABC as die ander twee sye 6 cm en 9 cm is? □C is die regte hoek.

Oplossing: In ’n reghoekige driehoek is die langste sy altyd die skuissy, naamlik die sy oorkant die regte hoek. Ons moet dus die Stelling van Pythagoras in sy ander vorm gebruik.

- As b die kortste sy is, en □C ’n regte hoek, dan is c die langste sy. Gebruik dus:

$b^2 = c^2 - a^2$ (let op waar b^2 is, en dat ons aftrek)

$b^2 = (9)^2 - (6)^2 = 81 - 36 = 45$ cm^2 Sakrekenaar tyd!

$b^2 = 45$. Gebruik die – knoppie op die sakrekenaar om b se waarde te kry.

- Jou sakrekenaar gee die antwoord: $b = 6{,}7082039\ldots$ ensovoorts. Maar maak dit sin om dit as ’n antwoord te gee? Bespreek gerus of

die benaderde (afgeronde) antwoord, naamlik 6,7cm, aan ons vereistes voldoen.

3.1.1 Bereken die skuissy van 'n driehoek met die lengtes van die ander twee sye albei gelyk aan 9 cm. (Benoem die driehoek self.)

3.1.2 ΔPQR is reghoeking en gelykbenig. Bereken die lengte van *PR*, as die skuinssy 13,5 cm is.

4. *Probleem*: Is ΔGHK reghoekig as $GK = 24$ cm, $GH = 26$ cm en $HK = 10$ cm is?

Oplossing: In hierdie probleem weet ons wat *al drie* die sylengtes is. As ons wil weet of dit 'n reghoekige driehoek is, moet ons bevestig dat $(\text{skuinssy})^2 = (\text{een sy})^2 + (\text{ander sy})^2$.

Die skuinssy is altyd die langste. Ons gebruik 'n spesifieke metode as ons 'n antwoord moet *bevestig*. Ons werk die linkerkant van die vergelyking en die regterkant apart uit. So:

- Linkerkant $= (\text{skuinssy})^2 = 26^2 = 676 \text{ cm}^2$
- Regterkant $= (\text{een sy})^2 + (\text{ander sy})^2 = 24^2 + 10^2 = 576 + 100 = 676 \text{ cm}^2$
- Omdat die linkerkant en die regterkant gelyk is, is die driehoek wel reghoekig.

- Is dit moontlik om te besluit watter hoek die regte hoek moet wees? Antwoord self!

4.1 Is die driehoeke met die volgende sylengtes reghoekig? Watter hoek is die regte hoek?

4.1.1 $a = 30$ mm, $b = 40$ mm en $c = 50$ mm.

4.1.2 $p = 8$ cm, $q = 13$ cm en $r = 15$ cm.

4.1.3 $MN = 15{,}56$ cm, en $NP = MP = 11$ cm.

einde van KLASWERK

HUISWERKOPDRAG

1. Bereken die derde sy van die volgende driehoeke:

1.1 ΔABC met □$C = 90^\circ$ en $b = 5$ mm en $c = 13$ mm

1.2 ΔMNO met □O die regte hoek en $m = 6$ cm en $n = 8$ cm.

2. Vind uit of die volgende driehoeke reghoekig is, en watter hoek 90° is.

2.1 $a = 9$ mm, $b = 11$ mm en c 13 cm

2.2 $XZ = 85$ mm, $XY = 13$ mm en $YX = 86$ mm.

einde van HUISWERKOPDRAG

Die verband tussen wortels en eksponente

KLASWERK

1. Agt van die vergelykings in hierdie lys moet in die tweede ry van die tabel onder die vergelyking in die boonste ry wat die beste pas, ingevul word.

25 = 5 ; b = b2 ; 9 = 3 ; 646 = 2 ; a33 = a ; 83 = 2 ;

814 = 3 ; 64 = 8 ; 49 = 7

Eksponent-vorm	2 3 = 8	9 = 3 2	25 = 5 2	7 2 = 49	3 4 = 81	b × b = b 2	64 = 2 6	a × a × a = a 3
Wortelvorm	....	....	....	....	....	....	....	....

2. Hoe om wortelvorme te vereenvoudig. Voorbeeld: 2ab3c × 8abc5.

- Die belangrikste stap is om die uitdrukking onder die wortelteken so eenvoudig moontlik as produkte van magte te skryf: 2ab3c × 8abc5 = 24a2b4c6.
- Ons soek 'n vierkantswortel – nou groepeer ons vierkante: 24a2b4c6 = 22ab2c32
- en verwyder wortelteken, dus: 2ab3c × 8abc5 = 22ab2c32 = 22ab2c3 = 4ab2c3

- Nog ’n voorbeeld: 16x2y52x2y3

- Skryf as produkte van magte: 16x2y52x2y3 = 24x2y52x2y3 = 25x4y63
- Omdat ons die derdemagswortel soek, groepeer ons derdemagte: 25x4y63 = 23x3y622x13 = 2xy234x3
- Die wortelvorm oor die deel wat vereenvoudig kan word, word verwyder. 2xy234x3 = 2xy24x3
- Die vereenvoudigde deel is ’n koëffisiënt; die res bly as ’n wortelvorm.

Let op dat ons dit net kan doen as ons faktore in die wortel het; m.a.w. ons kan dit nie doen as ons ’n somuitdrukking het nie.

- Vereenvoudig hierdie wortelvorme so ver moontlik:

2.1 25a5b3c2 2.2 81x9y123 2.3 16a + b2

einde van KLASWERK

VERRYKINGSOPDRAG

1. Soos jy gesien het, het die meeste reghoekige driehoeke *nie* sye met natuurlike getalle as lengtes nie. Daardie reghoekige driehoeke wat wel natuurlike getalle as sylengtes het, is egter baie interessant. Die bekende (3 ; 4 ; 5)-driehoek is een van hulle. Ons noem hierdie groepe van drie getalle

Drietalle van Pythagoras.

1.1 Neem groepe van drie getalle uit die volgende lys en probeer om al die drietalle van Pythagoras te kry.

3 ; 4 ; 5 ; 12 ; 13 ; 35 ; 36 ; 37 ; 77 ; 84 ; 85

einde van VERRYKINGSOPDRAG

Daar is baie verskillende maniere om die Stelling van Pythagoras te bewys.

- ’n Wiskundige in Amerika het, as ’n stokperdjie, soveel bewyse bymekaargemaak (meer as vier honderd) dat hy ’n boek gepubliseer het wat net uit die bewyse bestaan.

Assessering

LU 4
MetingDie leerder is in staat om gepaste meeteenhede, -instrumente en formules in ’n verskeidenheid kontekste te gebruik.

Ons weet dit as die leerder:

4.1 verhoudings en koersprobleme wat tyd, afstand en spoed behels, oplos;

4.2 probleme oplos – insluitende probleme in kontekste wat gebruik kan word om ‘n bewustheid van menseregte, sosiale, ekonomiese, kulturele en omgewingsake te bevorder – wat bekende meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe in ‘n verskeidenheid meetkontekste behels, deur die volgende te doen:

4.2.1 meet noukeurig en kies meetinstrumente wat geskik vir die probleem is;

4.2.2 skat en bereken noukeurig;

4.2.3 kies en gebruik geskikte formules en meeteenhede;

4.3 die ontwikkeling van meetinstrumente en konvensies deur die geskiedenis heen in verskillende kulture beskryf en illustreer;

4.4 die stelling van Pythagoras gebruik om probleme op te los wat ontbrekende lengtes in bekende meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe behels.

Memorandum

TOETS

Waar toepaslik, gee antwoorde benaderd tot 1 desimale plek.

1. Skryf die Stelling van Pythagoras volledig in woorde neer.

2. Bereken die skuinssy van ΔABC as hoek A ‘n regte hoek is en $b = 15$ mm en $c = 20$ mm.

3. ΔPQR het ‘n regte hoek by R. $PR = QR$. Bereken die lengte van sye PR en QR as $QP = 15$ cm.

4. Is ΔDEF reghoekig as $DF = 16$ cm, $DE = 14$ cm en $EF = 12$ cm?

5. Watter soort driehoek is ΔXYZ as $YZ = 24$ cm, $XY = 10$ cm en $XZ = 26$ cm? Gee volledige redes.

Memorandum

1. In ‘n reghoekige driehoek is die kwadraat van die skuinssy se lengte gelyk aan die som van die kwadrate van die lengtes van die ander twee sye.

2. Skuinssy $= a$. $a^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$ $a = 25$ Skuinssy is 25 mm

3. $PR^2 + QR^2 = QP^2$ $2(PR)^2 = 15^2$ $2(PR)^2 = 225$ $PR^2 = 112{,}5$ $PR \approx 10{,}6$ cm

4. $LK = 16^2 = 256$

$RK = 14^2 + 12^2 = 196 + 144 = 340$

$LK \neq RK$, dus is ΔDEF nie reghoekig nie.

5 $LK = 26^2 = 676$

$RK = 24^2 + 10^2 = 576 + 100 = 676$

$LK = RK$, dus is ΔXYZ reghoekig met hoek Y ‘n regte hoek.

6 Skryf die volgende wortelvorme in eenvoudigste vorm:

6.1 12

6.2 50a3b5

6.3 64a – 14b4

Memoranda

ONDERSOEK

- As die *a*, *b*, *c*-simbole verwarrend is, teken gerus ‘n driehoek vir leiding om die tabel te voltooi. Dit sal waarskynlik nodig wees om individuele aandag aan daardie leerders te gee wat as ‘n gevolg van swak meettegnieke nie die verwagte antwoorde lewer nie.
- Die vierkante behoort gekopieer te word sodat dit uitgeknip kan word.

2.1 Hier is die baie bekende “bewys” van die Stelling van Pythagoras. Hierdie werk word weer aangespreek waar gelykvormigheid behandel word.

KLASWERK

Dit is baie belangrik dat leerders die gewoonte ontwikkel om realistiese sketse te maak.

2.1.1 $EF = dd^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2 d = 13$

2.1.2 $XY = 4$

3.1.1 skuinssy$^2 = 81 + 81 = 162$ skuinssy $\approx$ 12,73 cm

3.1.2 $PR^2 + RQ^2 = 2\ (PR)^2$ – gelykbenig $2(PR)^2 = 13{,}5^2 PR \approx 9{,}55$ cm

4. Om dat *GH* die langste sy is, moet dit dus die skuinssy wees – dus is *K* ‘n regte hoek.

4.1.1 $LK = c^2 = 50^2 = 2\ 500$ mm^2

$RK = a^2 + b^2 = 30^2 + 40^2 = 2500$ mm^2

$LK = RK$ dus is driehoek reghoekig; C is die regte hoek.

4.1.2 $LK = 225$ cm^2$RK = 64 + 169 = 233$ cm^2

$LK \neq RK$ dus is driehoek nie reghoekig nie.

4.1.3 $LK = 242{,}11$ cm^2$RK = 121 + 121 = 242$ cm^2

$LK \neq RK$ maar hulle is amper gelyk; hoek P is baie naby aan 90°.

HUISWERKOPDRAG

1.1 $a = 12$ mm

1.2 $o = 10$ cm

2.1 Nee

2.2 Baie naby – hoek $Z \approx 90°$

KLASWERK

Memorandum

1 64 = 8 pas nie in die tabel nie.

c	9 2	= 3 25 5 2	= 7 2 49	= 3 4 81	= b	× b 64 = b 2 2 6	=	a × a × a = a 3
8 3 2	= 9	= 3 25 5	= 49 7	= 81 4 = 3	b 2	= b 64 6 = 2		a 5 5 = a

2.1 5a2bcab

2.2 3x3y433

2.3 $4(a+b)$

VERRYKINGSOPDRAG

- Groepeer leerders en vra hulle om mekaar se werk na te gaan en sodoende kan die hele klas uiteindelik besluit oor die antwoord.

Hoe lank is 'n stukkie tou?

WISKUNDE

Graad 9

GETALLE

Module 4

HOE LANK IS ‘N STUKKIE TOU?

KLASWERK

1. Werk in ’n groep en beantwoord die volgende

vrae:

1.1 Hoeveel meter is ’n duisend millimeter?

1.2 In watter eenhede word die volgende hoeveelhede die beste aangedui? Party is moeilik, en julle sal moet naslaanwerk doen en die antwoord later verbeter.

1.2.1 Jou lengte.

1.2.2 Die afstand tussen ons eie son en die naaste ster.

1.2.3 Hoe lank dit neem om van Kaapstad na Kaïro te stap.

1.2.4 Die hoeveelheid melk wat jy in ’n jaar drink.

1.2.5 Die hoeveelheid vitamine C wat ’n mens daagliks behoort in te neem.

1.2.6 Die koors van ’n pasiënt in ’n hospitaal in New York.

1.2.7 Die oppervlakte van Groenland.

1.2.8 Die spoed van ’n motor wat op die oop pad ry.

1.2.9 Die hoeveelheid hout wat ’n skrynwerker op een slag bestel.

1.2.10 Die totale hoeveelheid geld wat die regering deur belasting ontvang.

einde van KLASWERK

PROJEK

Die verloop van tyd

- Ons gebruik horlosies om die verloop van tyd aan te dui.
- Doen die volgende opdragte as ’n projek. Moenie plagiaat pleeg nie.

1. Verduidelik die verskil tussen *analoë* en *digitale* horlosies.

2. Maak ’n lys van al die horlosies wat in jou huis gebruik word, en sê of hulle analoog of digitaal is.

3. Soek ten minste een ander metode wat gebruik word om tyd te meet of tyd aan te dui – een wat nie algemeen in Westerse kulture voorkom nie. Dit kan iets uit die antieke tyd wees, of iets wat in ander lande voorkom. Probeer veral om iets na te vors oor tydmeting in Afrika. Verduidelik mooi hoe dit werk.

- Die projek moet ingehandig word op: ....

einde van PROJEK

HUISWERKOPDRAG

1. Voltooi enige onvoltooide gedeeltes van die klasopdrag hierbo.

2. Met watter instrumente word die volgende metings gedoen?

2.1 Jou lengte.

2.2 ’n Pasgebore baba se massa.

2.3 Die hoeveelheid melk wat by ’n dis gevoeg word as deel van die resep.

2.4 Die verf wat gebruik word om die buitekant van ’n huis te verf.

2.5 Die humiditeit in die lug.

2.6 Die spoed waarteen ’n motor beweeg.

2.7 Ons het ’n baie ingewikkelde manier om skrikkeljare te bereken. Vind uit:

2.7.1 Hoekom ons skrikkeljare nodig het, en

2.7.2 Watter jare skrikkeljare is.

einde van HUISWERKOPDRAG

Aansluiting by die wêreld – OPDRAG

- Kies een van hierdie twee vrae.

1. Jy het so pas op jou ouma se ou resepteboek afgekom. Daar is ’n paar resepte wat jy onthou, en jy wil hulle ook probeer. Ongelukkig bevat dit outydse eenhede wat moeite is om elke keer om te skakel. Besluit hoe jy ’n hulpmiddel soos ’n tabel of ’n grafiek of ’n formule kan maak om jou werk te bespoedig elke keer as jy een van Ouma se resepte probeer. Die eenhede wat dikwels voorkom is: die temperatuur van die oond wat in °F aangegee word; die massamate in onse en ponde en die vloeistofmates in pinte.

2. Jou pa het so pas ’n tweedehandse motor vir jou gekoop – maar dit is uit Amerika ingevoer en al die instrumentasie is in eenhede wat vir jou onbekend is en dus nie sin maak nie. Besluit hoe jy ’n hulpmiddel soos ’n tabel of ’n grafiek of ’n formule kan maak om beter te kan verstaan presies wat myle, gellings, myl per gelling (petrolverbruik) en myl per uur (spoed) in ons eie eenhede beteken.

einde van OPDRAG

Daar is al verskeie pogings aangewend om die Westerse kalender, met maande van verskillende lengtes, te verander. Dis egter nie so eenvoudig nie, omdat daar nie ’n heeltallige aantal dae in ’n jaar is nie (daarom het ons ’n eienaardige skrikkejaarstelsel nodig). Sou dit nie goed werk as al die maande

dieselfde aantal dae het nie? Of as die jaar in vier ewe groot kwartale verdeel word nie? Baie mense het al probeer om sake te verander, maar ongelukkig het al hierdie slim pogings gefaal, omdat die ou stelsel alreeds so diep ingeburger is. Indien jy meer wil lees hieroor, kan jy gerus onder “calender” in die *Encyclopaedia Brittanica* soek. Daar is oorvloedige materiaal oor hoe verskillende beskawings se kalenders werk. Probeer iets uitvind van die “World Calender”.

KLASWERK

- As jy begin met ’n lynstuk met lengte x cm, kan ’n vierkant gevorm word met vier van hierdie lyne. Deur ses sulke vierkante te gebruik, kan ’n kubus gevorm word.

1. Skryf neer wat die formules is vir die berekening van (a) die oppervlakte van ’n vierkant en (b) die volume van ’n kubus. Gebruik x as die veranderlike.

2. Voltooi nou die volgende tabel.

Lengte van lynstuk	Oppervlakte van vierkant	Volume van kubus
x	x^2	x^3

7 cm	....
7,1 cm	....
6,9 cm	....
3 cm	....
3,3 cm	....
2,7 cm	....

3. Sê nou jy het ’n *kubus* wat elkeen in die klas moet meet. Al die kubus se sylengtes is veronderstel om 7 cm te wees, maar nie al jou maats meet ewe akkuraat nie. Elkeen gebruik nou sy eie mates om die volume van die kubus te bereken. Sal dié wat 1 mm méér as 7 cm gemeet het, ’n groter fout maak met die volume as dié wat 1 mm mínder as 7 cm gemeet het?

1. Nou het julle ’n *vierkant* wat elkeen moet meet. Die vierkant se sye is veronderstel om almal 3 cm te wees, maar jou maats se metings verskil weer. Elkeen gebruik nou sy eie mates om die oppervlakte van die vierkant te bereken. Sal dié wat 3 mm méér as 3 cm gemeet het, ’n groter fout maak met die oppervlakte as dié wat 3 mm mínder as 3 cm gemeet het?

DIE GESIG WAT ’n DUISEND SKEPE TE WATER GELAAT HET

- Vraag: Wat word gemeet in millihelenas?
- Antwoord: Dit is die hoeveelheid skoonheid

wat nodig is om een boot te water te laat.

- Agtergrond: In die Griekse geskiedenis, ongeveer drieduisend jaar gelede, is Helena van Troje ontvoer. Sy was egter so mooi dat haar landgenote met een duisend skepe uitgevaar het om haar te gaan haal. Onlangs het 'n wetenskaplike grapjas, na aanleiding van hierdie verhaal, een *Helena* gedefinieer as die hoeveelheid skoonheid wat benodig word om 'n duisend skepe te laat seil.

Assessering

Leeruitkomstes(LUs)
LU 1
Getalle, Bewerkings en VerwantskappeDie leerder is in staat om getalle en die verwantskappe daarvan te herken, te beskryf en voor te stel, en om tydens probleemoplossing bevoeg en met selfvertroue te tel, te skat, te bereken en te kontroleer.
Assesseringstandaarde(ASe)
Ons weet dit as die leerder:
1.1 die historiese ontwikkeling van getallestelsels in

’n verskeidenheid historiese en kulturele kontekste (insluitend plaaslik) kan beskryf en illustreer;

1.2 rasionale getalle (insluitend baie klein getalle in wetenskaplike notasie) herken, gebruik en kan voorstel en gemaklik tussen ekwivalente vorms in geskikte kontekste kan beweeg;

1.3 probleme in konteks kan oplos, insluitend kontekste wat gebruik kan word om bewustheid by leerders te onwikkel van ander leerareas sowel as van menseregte, sosiale, ekonomiese en omgewingskwessies soos:

1.3.1 finansiële kontekste (insluitend wins en verlies, begrotings, rekeninge, lenings, enkelvoudige en saamgestelde rente, huurkoop, wisselkoers, kommissie, verhuring en die bankwese);

1.3.2 metings in die konteks van Natuurwetenskappe en Tegnologie;

1.4 probleme oor verhouding, koers en eweredigheid (direkte en omgekeerde) oplos;

1.5 skat en bereken deur geskikte bewerkings vir probleme te kies en te gebruik en die redelikheid van resultate te beoordeel (insluitend meetprobleme wat rasionale benaderings van irrasionale getalle behels).

LU 4

MetingDie leerder is in staat om gepaste meeteenhede, -instrumente en formules in ’n verskeidenheid kontekste te gebruik.

Ons weet dit as die leerder:

4.1 verhoudings en koersprobleme wat tyd, afstand en spoed behels, oplos;

4.2 probleme oplos – insluitende probleme in kontekste wat gebruik kan word om ‘n bewustheid van menseregte, sosiale, ekonomiese, kulturele en omgewingsake te bevorder – wat bekende meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe in ‘n verskeidenheid meetkontekste behels, deur die volgende te doen:
4.2.1 meet noukeurig en kies meetinstrumente wat geskik vir die probleem is;
4.2.2 skat en bereken noukeurig;
4.2.3 kies en gebruik geskikte formules en meeteenhede.

Memorandum

KLASWERK

1.1 Een

1.2.1 cm of m

1.2.2 ligjare

1.2.3 maande

1.2.4 liters

1.2.5 milligram

1.2.6 grade Fahrenheit

1.2.7 km^2 of hektaar

1.2.8 kilometer per uur

1.2.9 m^3

1.2.10 Rand of miljoene of biljoene rande

PROJEK

Probeer om oorspronklikheid aan te moedig.

HUISWERKOPDRAG

2.1 maatliniaal of maatband

2.2 skaal

2.3 milliliters

2.4 liters

2.5 higrometer

2.6 spoedmeter

OPDRAG

- Aanvaar enige redelik bruikbare antwoorde. Hierdie oefening kan weer bekyk word

wanneer die leerders grafieke, formules en tabelle goed verstaan. Dan behoort die meeste ‘n goeie poging te kan aanwend.

KLASWERK

- Hierdie oefening is bedoel om die gevolge van onakkurate berekenings te illustreer. As daar tyd is, kan die leerders ‘n fotokopie van ‘n vierkant gegee word om te meet. Hulle kan dan ‘n soortgelyke tabel voltooi en die antwoorde vergelyk.

WISKUNDE

Graad 9

GETALLE

Module 5

GELDSAKE

KLASWERK

- Daar is min mense wat nie amper daagliks met

geld werk nie. Hier is ’n paar basiese finansiële beginsels.

1. As iemand ’n besigheid bedryf, doen hy dit om geld te maak sodat hy kos kan koop, vir sy elektrisiteit en water kan betaal en ander behoeftes kan bekostig. Om geld te maak uit ’n besigheid, moet hy meer geld inkry uit die besigheid as wat hy uitgee om die besigheid aan die gang te hou. Dit beteken dat hy ’n *wins* maak as sy *inkomste* groter as sy *uitgawes* is. As die uitgawes meer is as die inkomste, dan is die gevolg ’n *verlies*. Nog ’n manier om dit te beskryf, is om van *bruto inkomste* en *netto inkomste* te praat. Bruto inkomste is dieselfde as inkomste, d.w.s. al die geld wat die besigheid inkry. Netto inkomste is die resultaat wanneer uitgawes van inkomste afgetrek word. As die inkomste meer is as uitgawes, dan is die netto inkomste positief en dus ’n wins, maar as die inkomste minder is as uitgawes, dan is daar ’n negatiewe netto inkomste – ’n verlies.

1.1 Bereken die wins of verlies van die volgende besighede:

1.1.1 Inkomste: R 36 000, R1 250 en R9 500; Uitgawes: R49 000

1.1.2 Uitgawes: R120 560; R15 030 en R55 250; Inkomste: R85 000; R95 000 en R63 550

1.1.3 Patsy verkoop gedroogde vrugte en lekkers

vanuit haar stalletjie in ’n groot winkelsentrum. In Maart het sy R150 huur vir die stalletjie en R850 vir die vloeroppervlakte in die sentrum betaal. Sy het R1 500 se droëvrugte verkoop. Sy het ’n assistent om haar twee middae af te los en sy het haar R250 vir Maart betaal. Sy het ook R2 840 se lekkers in Maart verkoop. In April was haar uitgawe vir die huur van die stalletjie dieselfde as in Maart, maar sy moes R50 meer vir die vloeroppervlakte betaal. Sy het vir Maart en April se aankope van droëvrugte en lekkers in totaal R5 500 betaal. Haar assistent het R280 in April verdien. Patsy se telefoonrekening vir Maart en April het R860 beloop. Sy het in April R1 370 se droëvrugte en R2 550 se lekkers verkoop. Haar verpakkingsmateriaal het haar in die twee maande R420 gekos. Het Patsy ’n wins of ’n verlies getoon gedurende dié twee maande? Sit jou berekenings netjies uiteen.

2. Enige gesin het sekere uitgawes wat betaal moet word. Om dit te doen, moet daar ’n inkomste wees – iemand moet ’n besigheid hê wat ’n wins toon, of ’n werk waarvoor die persoon ’n loon of salaris ontvang. Om seker te maak dat daar geld is vir die belangrikste uitgawes, stel meeste gesinne ’n begroting op. Dis baie maklik: Aan die begin van elke maand word al die uitgawes wat in daardie maand verwag word in volgorde van belangrikheid neergeskryf. As al die noodsaaklike uitgawes minder is as die verwagte inkomste, dan moet daar besluit word wat daar met die die res van die inkomste

gedoen gaan word. Word ’n deel daarvan gespaar of word dit alles uitgegee? Op hierdie manier verseker ’n mens dat al die geld nie aan flieks en partytjies uitgegee word sodat daar nie geld vir die telefoonrekening is nie! Voorbeeld: party van die Jacobs-gesin se verwagte maandelikse uitgawes is: R160 vir munisipale dienste, R240 vir die telefoon, R2 800 vir kruideniersware, R1 300 vir die verbandbetaling, R650 vir die huurkooppaaiement op die motor, R250 sakgeld vir

die kinders, R150 se skoolgeld, R340 vir petrol en R200 om te spaar vir ’n vakansie. Mnr. en mev. Jacobs verdien saam R8 200 per maand.

- Aangesien die gesin verwag om R6 090 vir die genoemde uitgawes te gebruik, beteken dit dat daar R2 110 vir ander dinge oorbly.

2.1 Stel begrotings op vir Anna, Louise en Maggie. Hulle is al drie in graad 9, en elkeen kry maandeliks ’n bedrag sakgeld: Anna kry R450, Louise kry R220 en Maggie kry R600. Hieruit moet elkeen hulle eie klere, grimering, vermaak, lekkergoed en selfoonkostes betaal. Werk in groepies van drie – elkeen in die groep neem een van die drie. Besluit self oor hoe die begroting moet lyk. As almal klaar is, moet almal wat met Anna se begroting gewerk het, bymekaar kom en groepies van 3, 4, 5 of 6 vorm. Doen dieselfde vir Louise en Maggie. Vergelyk nou die begrotings wat julle opgestel het en stel ’n

nuwe, beter begroting op in elke groep. Handig die resultate in.

3. Wanneer iemand ’n groter bedrag geld nodig het as wat hy in die bank het, kan hy probeer om die geld by iemand, of by ’n bank, te *leen*. Die persoon wat die lening toestaan, kry betaling vir die lening – ons noem dit *rente* – en die bedrag hang af van allerhande faktore, onder andere die grootte van die lening. Die rente*koers* hang ook van baie faktore af. Die lening en rente word óf aan die einde van die leningsperiode betaal, óf gereeld in *paaiemente*. As mnr. Botha R8 500 vir ses maande leen teen ’n jaarlikse koers van 15%, dan moet hy die R8 500 plus die rente na ses maande terugbetaal. Die rente vir ’n jaar is 15% van R8 500, dus moet hy die helfte (R637,50) betaal vir ses maande. Hy betaal dus R9 137,50 terug.

3.1 Mev. Petersen bak koek vir drie verskillende tuisbedryfwinkels. Nou benodig sy ’n nuwe oond. Sy het spaargeld om te gebruik en besluit om die R3 500 wat sy nog benodig by die bank te leen. Sy leen die geld teen ’n rentekoers van 13,5% per jaar. Hoeveel sal sy die bank moet betaal aan die einde van die jaar?

4. Die meeste mense probeer om gereeld te begroot vir ’n bedrag wat gespaar kan word. Op hierdie manier kan ’n mens geld in die bank bymekaarmaak vir latere uitgawes. ’n Mens kan spaar vir ’n

vakansie, vir die verf van jou huis, vir ’n nuwe motor en (baie belangrik) vir aftrede wanneer daar nie meer ’n gereelde inkomste is nie. Die geld word gespaar teen ’n sekere *rentekoers*. Dit beteken dat die bank waar die geld belê word, gereeld geld uitbetaal aan die spaarder, afhangende van die rentekoers en die bedrag. Ons noem dit *enkelvoudige* rente. As die rentebedrag egter bygevoeg word by die gespaarde bedrag, dan word daar elke keer meer rente betaal, wat weer belê word. Dit word *saamgestelde* rente genoem.

Voorbeeld: Mev. Van der Merwe het gespaar terwyl sy gewerk het, en, toe sy aftree, het sy R150 000 in die bank. Sy het dit belê teen ’n rentekoers van 11% per jaar. Die bank stuur elke maand vir haar een-twaalfde van haar jaarlikse rente. Die rente beloop R16 500 per jaar, en dus R1 375 per maand.

- Janie se ryk oom gee vir haar R7 000 in ’n bankrekening toe sy ses jaar oud word, teen ’n rentekoers van 10%. Omdat die rente elke jaar weer by die hoofbedrag bygevoeg word (saamgestelde rente), werk dit so:

- Na 1 jaar: R7 000 + R700 = R7 700 Na 2 jaar: R7 700 + R770 = R8 470 Na 3 jaar: R8 470 + R847 = R9 317Na 4 jaar: R9 317 + R932 = R10 248 (nou is Janie al 10 jaar oud)
- Toe Janie mondig word, het sy ’n lekker bedrag in die bank. Hoeveel is dit?

- Op klein Kevin se eerste verjaardag betaal sy ouma R500 in ’n bankrekening in. Elke jaar op sy verjaardag doen sy dit weer totdat hy agttien is. As ons aanneem dat die rentekoers 10% bly gedurende hierdie 17 jaar, en dat die rente aan die einde van elke jaar bereken word op die bedrag in die bank op daardie oomblik, en dan bygevoeg word by die bedrag reeds in die bank, kan ons so bereken hoeveel Kevin in die bank het na hy 18 word. Op sy tweede verjaardag gebeur dit:

- R500 (die eerste betaling) + R50 (die rente daarop) + R500 (die tweede betaling) = R1 050 is die nuwe bedrag in die bank.
- Volgende jaar (drie jaar oud): R1 050 + R105 + R500 = R1 655 in die bank.
- Dan: R1 655 + R165,50 + R500 = R2 320,50. Ensovoorts: Voltooi die som!

4.1 Dieselfde Mev. van der Merwe as hierbo het ’n bedrag van R95 000 geërf wat sy ook belê het, hierdie keer teen 11,5% rente per jaar. Die rente word ook maandeliks aan haar uitbetaal. Mev. Van der Merwe kry ook ’n maandelikse pensioen van R3 100 van haar werkgewer se pensioenfonds. Hoeveel ontvang sy in totaal elke maand?

5. ’n Motor of meubels word dikwels op *huurkoop* gekoop. Dit is ’n spesiale soort lening wat aangegaan word om iets groots mee te koop. Dit is gerieflik,

maar die rentekoers is hoog, daar word outomaties versekering ingesluit, daar word van ’n mens verwag om ’n groot bedrag as deposito te betaal, die terugbetalings is hoog en die totale bedrag moet oor ’n sekere tydperk volledig terugbetaal word of die goedere word teruggeneem. Die huurkooplening word ook net toegestaan aan mense wat ’n vaste betrekking het, en dan hang die grootte van die lening af van jou salaris om seker te maak dat jy die afbetalings kan byhou. ’n Voorbeeld is iemand wat graag ’n nuwe motortjie wil koop. Sy het ’n goeie werk en het ook R3 800 gespaar vir ’n deposito. Die verkoopsman sal ook haar ou motor aanvaar as deel van die deposito; hy waardeer die motor teen R4 100. Om ’n motor van R70 800 te koop sal sy R1 800 per maand vir 54 maande moet betaal voordat die motor haar eiendom word.

5.1 Wat is die totale bedrag geld wat sy uiteindelik betaal het?

5.2 Sê nou sy kry ’n lening teen 18% per jaar by die bank, verkoop haar ou motor vir R4 000 en gebruik haar spaargeld om R70 800 vir die motor te betaal. Sy betaal die banklening af teen R1 800 per maand. Wat is die totale koste van die motor teen die tyd dat sy die laaste leningsafbetaling gemaak het?

6. As jy oorsee reis, moet jy geld in ’n oorsese geldeenheid hê vir jou uitgawes daar. As jy Amerika wil besoek, moet jy jou rande in dollars omsit.

Hoeveel rande jy vir een dollar moet betaal, wissel van dag tot dag. Dit was al R1,50 in die verlede, en onlangs was dit R13,80. Hierdie verband tussen twee geldeenhede word die *wisselkoers* genoem. As ’n Amerikaanse toeris hier kom kuier, sal hy R35 betaal vir ’n hamburger, skyfies en ’n koeldrank. Teen ’n wisselkoers van R10 per dollar sal die besoeker $3,50 uitgee vir die maaltyd.

6.1 Hoeveel Britse pond (£) sal iemand uit Brittanje betaal vir dieselfde maaltyd as die Rand-Pond-wisselkoers 14,85 is?

einde van KLASWERK

HUISWERKOPDRAG

1. Vind uit wat die *omset* van ’n besigheid is. Beskryf dit en gee ’n voorbeeld.

2. Stel ’n beter begroting op vir die Jacobs gesin, en besluit hoe die res van die inkomste bestee moet word. Dink veral aan moontlike uitgawes wat nie op die gegewe lys is nie.

3. Iemand leen R12 000 teen 11% per jaar. Na die eerste maand betaal sy elke maand R900 terug. Hoeveel maande, na jou mening, sal dit neem tot die volle bedrag afbetaal is? Wys al jou berekeninge netjies.

4. As jy 3 miljoen rand in die Lotto wen en dit belê

teen 10,5% per jaar, hoeveel rente kan jy verwag as dit jaarliks uitbetaal word? En maandeliks? En weekliks? En daagliks? En hoeveel het jy dan nog in die bank? Benader jou antwoorde tot die naaste rand.

5. As jy nie ’n lening wil aangaan om die motortjie te koop nie, maar jy kan R1 500 per maand spaar (teen ’n 13,5% jaarlikse rentekoers) totdat jy genoeg het om R66 000 vir die motor te betaal, hoe lank sal dit jou neem?

6. Jy toer in Amerika en wil graag na Disney World toe gaan. Jy kan by ’n groep aansluit wat ’n sesdagtoer aanbied vir $1 740, wat alle onkoste dek. Die huidige wisselkoers is R9,55 per dollar. Werk uit hoeveel rand jy sal moet betaal vir hierdie pakket.

einde van HUISWERKOPDRAG

Assessering

Leeruitkomstes(LUs)
LU 1
Getalle, Bewerkings en VerwantskappeDie leerder is

in staat om getalle en die verwantskappe daarvan te herken, te beskryf en voor te stel, en om tydens probleemoplossing bevoeg en met selfvertroue te tel, te skat, te bereken en te kontroleer.

Assesseringstandaarde(ASe)

Ons weet dit as die leerder:

1.1 die historiese ontwikkeling van getallestelsels in ’n verskeidenheid historiese en kulturele kontekste (insluitend plaaslik) kan beskryf en illustreer;

1.2 rasionale getalle (insluitend baie klein getalle in wetenskaplike notasie) herken, gebruik en kan voorstel en gemaklik tussen ekwivalente vorms in geskikte kontekste kan beweeg;

1.3 probleme in konteks kan oplos, insluitend kontekste wat gebruik kan word om bewustheid by leerders te onwikkel van ander leerareas sowel as van menseregte, sosiale, ekonomiese en omgewingskwessies soos:

1.3.1 finansiële kontekste (insluitend wins en verlies, begrotings, rekeninge, lenings, enkelvoudige en saamgestelde rente, huurkoop, wisselkoers, kommissie, verhuring en die bankwese);

1.3.2 metings in die konteks van Natuurwetenskappe en Tegnologie;

1.4 probleme oor verhouding, koers en eweredigheid (direkte en omgekeerde) oplos.

Memorandum

TOETS

1. ‘n Speelgoedwinkel:

Bereken die netto inkomste uit die volgende gegewens, en sê of dit ‘n wins of verlies is.

Uitgawes: Huur van perseel: R1 450

Water– en ligterekening: R380

Telefoonrekening: R675

Lone van personeel: R7 530

Aankope van speelgoed van groothandelaar: R67 550

Verpakkingsmateriaal: R1 040

Inkomste uit verkope: R92 406

2. Joey leen vir ses maande R780 by sy pa om sy fiets op te knap. Sy pa vra 8% rente per jaar. Hoeveel moet Joey na ses maande terug betaal?

3. Jy kry ‘n R12 000 erflating van ‘n tante se boedel. Jy mag dit egter eers oor vyf jaar kry wanneer jy 19 is. Intussen word dit belê teen 13,5% per jaar saamgestelde rente. Hoeveel word aan jou uitbetaal na vyf jaar?

4. Die rand-eurowisselkoers is 8,75. Hoeveel rand moet jy omruil as jy 11 500 euro gaan benodig vir ‘n vakansie in Europa?

Memorandum

1. Netto Inkomste = Totale Inkomstes – Totale Uitgawes = R92 406 – R78 625 = R13 781

En dit is ‘n wins.

2. Vir ‘n jaar beloop die rente R62,40. Vir ses maande skuld hy sy pa R811,20 in totaal.

3. Na een jaar is daar R13 620 in die bank.

Na twee jaar: R15 458,70

Na drie jaar: R17 545, 62…

Na vier jaar: R19 914,28…

Na vyf jaar: R22 602,71 benaderd tot die naaste sent

4. Rand = 8,75 × 11 500 = R100 625

Memoranda

- Die opvoeder moet probeer om hierdie leereenheid uit te brei met die lewenservaring en agtergrond van die leerders as grondslag. Hierdie paar voorbeelde en oefeninge val dalk

buite die ervaringsveld van u leerdergroep.

KLASWERK

1.1.1 Netto inkomste = (36 000 + 1 250 + 9 500) – 49 000 = –2 250 (R2 250 verlies)

1.1.2 (85 000 + 95 000 + 63 550) – (120 560 + 15 030 + 55 250) = 52 710 rand wins

1.1.3 Verlies = R1 100

2.1 Daar is nie ‘n regte of verkeerde antwoord nie – dit gaan slegs om die proses.

3.1 R3 972,50

4. Die laaste voorbeeld (Kevin) is eintlik meer as net saamgestelde rente – dis hoe ‘n annuïteit werk. Dit is ‘n gewilde spaarmeganisme – bied dit gerus as verryking aan.

Later maak die leerders kennis met gemene faktore, dan sal hulle die patroon van die saamgestelde renteberekening kan waardeer.

4.1 1 375 + 3 100 + 910,42 = R5 385,42

5.1 Ongeveer R105 100

5.2 Ongeveer R85 000

6.1 £2,36

HUISWERKOPDRAG

1. Omset is die totale bedrag wat uit verkope gemaak word, voor aftrekkings.

2. Beoordeel hier die proses en nie die antwoord nie.

3. 15 maande (die bedrag in die 15de maand is minder).

4. Jaarliks: R315 000; maandeliks: R26 250; weekliks: R6 058; daagliks: R865

5. Effens minder as twee jaar (in twee jaar kan sy amper R70 000 spaar).

    1. R16 617

WISKUNDE

Graad 9

ALGEBRA EN MEETKUNDE

Module 6

ALGEBRA VAN DIE VIER BASIESE OPERASIES

Aktiwiteit 1

Om die optelling– en aftrekkingsreëls van algebra te hersien

[LU 1.2, 1.6]

A Onthou jy nog wat **terme** is?

- Terme word deur + of – geskei. Sê in elk van die volgende hoeveel terme daar is:

1. $a + 5$

2. $2a^2$

3. $5a(a+1)$

4. $3a - 1a^2 + 5a$

- Versamel die *gelyksoortige* terme om elk van die volgende uitdrukkings te vereenvoudig:

1. $5a + 2a$

2. $2a^2 + 3a - a^2$

3. $3x - 6 + x + 11$

4. $2a(a-1) - 2a^2$

B **Optel van uitdrukkings**

- Voorbeeld:

Tel $3x + 4$ by $x + 5$. $(x + 5) + (3x + 4)$ Skryf as som, met hakies.

$x + 5 + 3x + 4$ Verwyder hakies versigtig.

$4x + 9$ Versamel gelyksoortige terme.

Tel die twee gegewe uitdrukkings bymekaar:

1. $7a + 3$ en $a + 2$

2. $5x – 2$ en $6 – 3x$

3. $x + ½$ en $4x – 3½$

4. $a^2 + 2a + 6$ en $a – 3 + a^2$

5. $4a^2 – a – 3$ en $1 + 3a – 5a^2$

C **Aftrek van uitdrukkings**

- Bestudeer die volgende voorbeelde sorgvuldig:

Trek $3x – 5$ van $7x + 2$ af.

$(7x + 2) – (3x – 5)$ Let op: $3x – 5$ is in tweede posisie, na die minus.

$7x + 2 – 3x + 5$ Die minus voor die hakie maak ‘n verskil!

$4x + 7$ Versamel gelyksoortige terme.

Bereken $5a – 1$ minus $7a + 12$: $(5a – 1) – (7a + 12)$

$5a – 1 – 7a – 12$

$–2a – 13$

D **Gemengde probleme**

- Onthou om jou antwoorde volledig te vereenvoudig in die volgende oefening:

1. Tel $2a – 1$ by $5a + 2$.

2. Vind die som van $6x + 5$ en $2 – 3x$.

3. Wat is $3a – 2a^2$ plus $a^2 – 6a$?

4. $(x^2 + x) + (x + x^2) = . . .$

5. Bereken $(3a – 5) – (a – 2)$.

6. Trek $12a + 2$ van $1 + 7a$ af.

7. Hoeveel is $4x^2 + 4x$ minder as $6x^2 – 13x$?

8. Hoeveel is $4x^2 + 4x$ meer as $6x^2 – 13x$?

9. Wat is die verskil tussen $8x + 3$ en $2x + 1$?

- Gebruik geskikte tegnieke om die volgende uitdrukkings te vereenvoudig:

1. $x^2 + 5x^2 – 3x + 7x – 2 + 8$

2. $7a^2 – 12a + 2a^2 – 5 + a – 3$

3. $(a^2 – 4) + (5a + 3) + (7a^2 + 4a)$

4. $(2x – x^2) – (4x^2 – 12) – (3x – 5)$

5. $(x^2 + 5x^2 – 3x) + (7x – 2 + 8)$

6. $7a^2 – (12a + 2a^2 – 5) + a – 3$

7. $(a^2 – 4) + 5a + 3 + (7a^2 + 4a)$

8. $(2x – x^2) – 4x^2 – 12 – (3x – 5)$

9. $x^2 + 5x^2 – 3x + (7x – 2 + 8)$

10. $7a^2 – 12a + 2a^2 – (5 + a – 3)$

11. $a^2 – 4 + 5a + 3 + 7a^2 + 4a$

12. $(2x – x^2) – [(4x^2 – 12) – (3x – 5)]$

- Hier is die antwoorde op die vorige 12 probleme:

1. $6x^2 + 4x + 6$

2. $9a^2 - 11a - 8$

3. $8a^2 + 9a - 1$

4. $-5x^2 - x + 17$

5. $6x^2 + 4x + 6$

6. $5a^2 - 11a + 2$

7. $8a^2 + 9a - 1$

8. $-5x^2 - x - 7$

9. $6x^2 + 4x + 6$

10. $9a^2 - 13a - 2$

11. $8a^2 + 9a - 1$

12. $-5x^2 + 5x + 7$

Aktiwiteit 2

Om sekere polinome (veelterme) te vermenigvuldig deur hakies en die distributiewe wet te gebruik

[LU 1.2, 1.6, 2.7]

‘n *Mono*miaal het *een* term; ‘n *bi*nomiaal het *twee* terme; ‘n *tri*nomiaal het *drie* terme. Ons noem hulle dikwels eenterme, tweeterme en drieterme.

A **Vermenigvuldiging van eenterme**.

Ons gebruik dikwels hakies.

- Voorbeelde:

$2a \times 5a = 10a^2$

$3a^3 \times 2a \times 4a^2 = 24 a^6$

$4ab \times 9a^2 \times (-2a) \times b = -36a^4b^2$

$a \times 2a \times 4 \times (3a^2)^3 = a \times 2a \times 4 \times 3a^2 \times 3a^2 \times 3a^2 = 126a^8$

$(2ab^2)^3 \times (a^2bc)^2 \times (2bc)^2 = (2ab^2) (2ab^2) (2ab^2) \times (a^2bc) (a^2bc) \times (2bc) (2bc) = 32a^7b^{10}c^4$

Maak altyd seker dat jou antwoord in die eenvoudigste vorm is.

Oefening:

1. $(3x) (5x^2)$

   1. $(x^3) (-2x)$

2. $(2x)^2 (4)$
3. $(ax)^2 (bx^2) (cx^2)^2$

B **Eenterm × tweeterm**

Hakies is noodsaaklik.

- Voorbeelde:

5(2a + 1) beteken: vermenigvuldig 5 met 2a en ook met 1. $5 (2a + 1) = 10a + 5$

Wees baie versigtig om nie tekenfoute te maak nie.

$4a(2a + 1) = 8a + 4a$

$–5a(2a + 1) = –10a^2 – 5a$

$a^2(–3a^2 – 2a) = –3a^4 – 2a^3$

$–7a(2a – 3) = –14a^2 + 21a$

Let op: Ons het ‘n uitdrukking met *faktore* verander na ‘n uitdrukking met *terme*. Ons kan ook sê: ‘n P*rodukuitdrukking* is nou ‘n *somuitdrukking*.

Oefening:

1. $3x (2x + 4)$

    1. $x^2 (5x – 2)$
    2. $–4x (x^2 – 3x)$

3. $(3a + 3a^2)(3a)$

C **Eenterm × drieterm**

- Voorbeelde:

$5a(5 + 2a - a^2) = 25a + 10a^2 - 5a^3$

$-\frac{1}{2}(10x^5 + 2a^4 - 8a^3) = -5x^5 - a^4 + 4a^3$

Oefening:

1. $3x(2x^2 - x + 2)$
2. $-ab^2(-bc + 3abc - a^2c)$
3. $12a(\frac{1}{4} + 2a + \frac{1}{2}a^2)$

Probeer: 4. $4x(5 - 2x + 4x^2 - 3x^3 + x^4)$

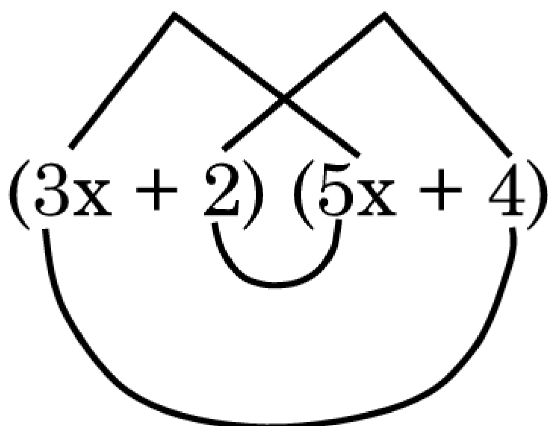
D **Tweeterm × tweeterm**

Elke term van die eerste tweeterm word vermenigvuldig met *elke term* van die tweede tweeterm.

$(3x + 2)(5x + 4) = (3x)(5x) + (3x)(4) + (2)(5x) + (2)(4) = 15x^2 + 12x + 10x + 8$

$= 15x^2 + 22x + 8$ Maak altyd seker dat jou antwoord vereenvoudig is.

- Hierdie katgesiggie sal jou help onthou hoe om twee tweeterme te vermenigvuldig:



- Die linkeroor sê: Vermenigvuldig die *eerste* term van die eerste tweeterm met die *eerste* term van die tweede tweeterm.
- Die ken sê: Vermenigvuldig die *eerste* term van die eerste tweeterm met die *tweede* term van die tweede tweeterm.
- Die bekkie sê: Vermenigvuldig die *tweede* term van die eerste tweeterm met die *eerste* term van die tweede tweeterm.
- Die regteroor sê: Vermenigvuldig die *tweede* term van die eerste tweeterm met die *tweede* term van die tweede tweeterm.

Daar is belangrike patrone in die volgende vermenigvuldigingsoefening – let baie mooi op na hulle.

Oefening:

1. (a + b) (c + d)
2. (2a – 3b) (–c + 2d)

3. $(a^2 + 2a)(b^2 - 3b)$
4. $(a + b)(a + b)$
5. $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x)$
6. $(3x - 1)(3x - 1)$
7. $(a + b)(a - b)$
8. $(2y + 3)(2y - 3)$
9. $(2a^2 + 3b)(2a^2 - 3b)$
10. $(a + 2)(a + 3)$
11. $(5x^2 + 2x)(x^2 - x)$

E **Tweeterm × veelterm**

- Voorbeeld:

$(2a + 3)(a^3 - 3a^2 + 2a - 3) = 2a^4 - 6a^3 + 4a^2 - 6a + 3a^3 - 9a^2 + 6a - 9$

$= 2a^4 - 3a^3 - 5a^2 - 9$ (vereenvoudigde vorm)

Oefening:

1. $(x^2 - 3x)(x^2 + 5x - 3)$
2. $(b + 1)(3b^2 - b + 11)$
3. $(a - 4)(5 + 2a - b + 2c)$
4. $(-a + 2)(a + b + c - 3d)$

- Hoe goed het jy in hierdie aktiwiteit gevaar?

Aktiwiteit 3

Om faktore van sekere algebraïese uitdrukkings te vind

[LU 1.6, 2.1, 2.7]

A **Faktore**

Hierdie tabel toon die faktore van sekere eenterme.

Uitdrukking	Kleinste faktore
42	2 × 3 × 7
6ab	2 × 3 × a × b
$21a^2b$	3 × 7 × a × a × b
$(5abc^2)^2$	5 × a × b × c × c × 5 × a × b × c × c
$–8y^4$	–2 × 2 × 2 × y × y × y × y
$(–8y^4)^2$	–2 × 2 × 2 × y × y × y × y × –2 × 2 × 2 × y × y × y × y

Die faktore kan in enige orde geskryf word, maar as jy by die gebruiklike orde hou, sal jou werk vergemaklik word Twee van die lyste faktore in die tabel is nie in die gebruiklike orde nie – herskryf

hulle in orde.

B **Gemene faktore van tweeterme**

- Beskou die tweeterm 6ab + 3ac.
- Die faktore van 6ab is 2 × 3 × a × b en die faktore van 3ac is 3 × a × c.
- Die faktore wat in beide 6ab en 3ac voorkom, is 3 en a – hulle is *gemene faktore*.
- Ons gebruik nou hakies om die gemene faktore en die res te groepeer:

6ab = **3a** × 2b en 3ac = **3a** × c

- Ons *faktoriseer* nou 6ab + 3ac. Dit word so uiteengesit:

6ab + 3ac = **3a** (2b + c).

- ‘n Uitdrukking met *terme* word verander na ‘n uitdrukking met *faktore*.
- Ons kan ook sê: ‘n *Somuitdrukking* is nou ‘n *produkuitdrukking*.
- Nog voorbeelde:

1. $6x^2 + 12x = \mathbf{3x}\ (2x + 4)$
2. $5x^3 – 2x^2 = \mathbf{x^2}\ (5x – 2)$
3. $–4x^3 + 12x^2 = \mathbf{–4x}\ (x^2 – 3x)$
4. $9a^2 + 9a^3 = (3a + 3a^2)\ (\mathbf{3a})$

Kyk weer na die oefening in deel B van die vorige aktiwiteit – het jy die probleme herken?

C **Gemene faktore van veelterme**

Presies dieselfde metode word gebruik as ons die gemene faktore van meer as twee terme moet vind.

- Voorbeelde:

$6x^3 - 3x^2 + 6x = \mathbf{3x}\,(2x^2 - x + 2)$

$ab^3c - 3a^2b^3c + a^3b^2c = \mathbf{ab^2c}\,(b - 3ab + a^2)$

$3a + 24a^2 + 6a^3 = \mathbf{3a}\,(1 + 8a + 2a^2)$

$20x - 8x^2 + 16x^3 - 12x^4 + 4x^5 = \mathbf{4x}\,(5 - 2x + 4x^2 - 3x^3 + x^4)$

As jy mooi kyk, sal jy oplet dat die terme wat in die hakies oorbly, nie meer enige gemene faktore het nie. Dis wat gebeur as die uitdrukking ten volle gefaktoriseer is. Jy moet altyd die grootste moontlike gemene faktor van al die terme uithaal.

Oefening:

Faktoriseer die volgende uitdrukkings volledig deur die grootste gemene faktor uit te haal:

1. $12abc + 24ac$
2. $15xy - 21y$
3. $3abc + 18ab^2c^3$
4. $8x^2y^2 - 2x$
5. $2a^2bc^2 + 4ab^2c - 7abc$

6. $12a(bc)^2 - 8(abc)^3 + 4(ab)^2c^3 - 20bc + 4a$

Paaraktiwiteit:

Het jy opgelet dat in elke geval die aantal terme in die hakies na faktorisering presies dieselfde is as die aantal terme in die oorspronklike uitdrukking?

Verduidelik vir jou maat hoekom jy dink dat dit altyd so sal gebeur.

D **Faktore van die verskil van kwadrate**

In deel D van die vorige aktiwiteit moes jy hierdie drie pare tweeterme vermenigvuldig:

$(a + b)(a - b)$,

$(2y + 3)(2y - 3)$ en

$(2a^2 + 3b)(2a^2 - 3b)$

- Hier is die oplossing:

$(a + b)(a - b) =$ **$a^2 - b^2$**

$(2y + 3)(2y - 3) =$ **$4y^2 - 9$**

$(2a^2 + 3b)(2a^2 - 3b) =$ **$4a^4 - 9b^2$**

Let op dat die antwoorde ‘n baie spesifieke patroon aanneem: **vierkant** *minus* **vierkant**.

Ons noem dit die verskil van kwadrate of *verskil van vierkante*, en dit word so gefaktoriseer:

Eerste–vierkant *minus* **tweede–vierkant**

= (eerste – vierkant*plus*tweede – vierkant) (eerste – vierkant*minus*tweede – vierkant)

- Voorbeelde:

$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$

$4 - b^2 = (2 + b)(2 - b)$

$9a^2 - 1 = (3a + 1)(3a - 1)$

DIT WORD VAN JOU VERWAG OM GOED VERTROUD TE WEES MET DIE ALGEMEENSTE VIERKANTE EN HUL VIERKANTSWORTELS.

Hier is ‘n klompie belangrikes – voeg self ander by die lys.

$2^2 = 4$ $3^2 = 9$ $(a^2)^2 = a^4$

$(a^3)^2 = a^6$

$(½)^2 = ¼$ $1^2 = 1$

Oefening:

Faktoriseer volledig:

1. $a^2 - b^2$

    1. $4y^2 - 9$
    2. $4a^4 - 9b^2$
    3. $1 - x^2$
    4. $25 - a^6$
    5. $a^8 - \frac{1}{4}$
    6. $4a^2b^2 - 81$
    7. $0,25 - x^2y^6$

9. $2a^2 - 2b^2$ (versigtig!)

E **Gekombineerde gemene faktore en verskille van vierkante**

Soos in die laaste probleem (9), is dit noodsaaklik om eers gemene faktore uit te haal, en om daarna die uitdrukking in die hakies te faktoriseer, indien moontlik.

- Nog 'n voorbeeld:

Faktoriseer $12ax^2 - 3ay^2$

Herken eers die gemene faktor 3a, voor jy sê dat dit nie 'n verskil van vierkante kan wees nie.

$12ax^2 - 3ay^2 = 3a(4x^2 - y^2)$ Nou herken ons $4x^2 - y^2$ as verskil van twee vierkante.

$12ax^2 - 3ay^2 = 3a(4x^2 - y^2) = 3a(2x + y)(2x - y)$.

Oefening:

Faktoriseer *volledig*:

1. $ax^2 – ay^4$

2. $a^3 – ab^2$

3. $0,5a^2x – 4,5b^2x$

4. $a^5b^3c – abc$

F **Opeenvolgende verskille van vierkante**

Hou jou oë oop en probeer hierdie tweeterm volledig faktoriseer: $a^4 – b^4$

Nou hierdie oefening – soos gewoonlik, faktoriseer volledig.

1. $x^6 – 64$

2. $1 – m^8$

3. $3a^4 – 24b^8$

4. $x – x^9$

G **Faktore van drieterme**

Bestudeer die antwoorde op hierdie vier probleme (uit ‘n vorige aktiwiteit). Die vereenvoudigde

antwoorde het partykeer twee terme, partykeer drie terme en partykeer vier. Bespreek met ‘n maat wat hier aan die gang is en besluit wat die verskille veroorsaak.

1. $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$ (vereenvoudig)

2. $(a + 2)(a + 3) = a^2 + 3a + 2a + 6 = a^2 + 5a + 6$

3. $(a + b)(a + b) = a \times a + ab + ba + b \times b = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (vereenvoudig)

4. $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ (hierdie antwoord kan nie vereenvoudig word nie)

- Die antwoord op die soort probleem in vraag 1 hierbo het die vorm van ‘n verskil van vierkante.
- Die antwoorde op 2 en 3 is drieterme. Ons gaan nou probeer om drieterme te faktoriseer.
- Die eerste feit om te onthou is dat *nie alle drieterme gefaktoriseer kan word nie*.

Werk agteruit deur probleem 2:

$a^2 + 5a + 6 = a^2 + 3a + 2a + 6 = (a + 2)(a + 3)$.

- So is dit duidelik waar die a^2 vandaan kom, en die 5a en die 6.

Faktoriseer nou $a^2 + 7a + 12 = (\ )(\ )$ deur twee geskikte tweeterme in die twee paar hakies te skryf.

- As jy die tweeterme in die hakies uitvermenigvuldig soos jy in aktiwiteit 2.2 geleer is, kan jy jou antwoord toets. Hou aan en toets telkens jou antwoorde tot jy seker is hoe om dit te doen. Doen dieselfde in die volgende oefeninge:

- Elke drieterm het 'n maat in die tweede kolom; soek hulle uit:

A. $a^2 - 5a - 6$ 1. $(x + 2)(x + 3)$

B. $a^2 - a - 6$ 2. $(x - 2)(x + 3)$

C. $a^2 - 5a + 6$ 3. $(x + 1)(x - 6)$

D. $a^2 + 7a + 6$ 4. $(x - 2)(x - 3)$

E. $a^2 + 5a + 6$ 5. $(x + 1)(x + 6)$

F. $a^2 + 5a - 6$ 6. $(x - 1)(x + 6)$

G. $a^2 + a - 6$ 7. $(x + 2)(x - 3)$

H. $a^2 - 7a + 6$ 8. $(x - 1)(x - 6)$

- Faktoriseer nou die volgende drieterme op dieselfde manier. Die laaste twee is moeiliker as die eerste vier!

1. $a^2 + 3a + 2$
2. $a^2 + a - 12$
3. $a^2 - 4a + 3$
4. $a^2 - 9a + 20$
5. $a^2 + ab - 12b^2$
6. $2a^2 - 18a + 40$

Aktiwiteit 4

Om faktorisering te gebruik in die vereenvoudiging van breuke, en in die optelling, vermenigvuldiging en deling van breuke

[LU 1.2, 1.6, 2.9]

A. **Vereenvoudiging van algebraïese breuke**

Twee van die volgende vier breuke kan vereenvoudig word, en twee nie. Watter twee kan?

$2 + a \; 2 - a$

$3 a + b \; a + b$

$4 + x \; x + 4$

$a \; b - c \; 2 \; b + c$

Jy het seker nou al agtergekom dat dit baie moeite

is om te faktoriseer. Hoekom doen ons dit?

- Hierdie breuk kan nie vereenvoudig word soos dit staan nie: $6a2b-6b2a-2$. Dis omdat ons nie terme mag kanselleer nie. As ons die *som*uitdrukkings na *produk*uitdrukkings kan verander (deur faktorisering) sal ons die faktore kan kanselleer, en sodoende klaar kan vereenvoudig.

$6a^2b - 6b = 6b(a^2 - 1) = 6b(a + 1)(a - 1)$ en $2a - 2 = 2(a - 1)$

- Dus is die motivering vir faktorisering die behoefte aan vereenvoudiging.

Dus: $6a2b-6b2a-2 = 6ba+1a-12a-1 = 3ba+11 = 3b(a + 1)$.

Dit is baie belangrik om volledig te faktoriseer.

Oefening:

Faktoriseer beide teller en noemer, en vereenvoudig:

1 $12a+6b2a+b$

2 $x2-9x+3$

3 $2a+1a-16a+12$

4 $5a2-55a+5$

B. **Vermenigvuldiging en deling van breuke**

- Die gewone reëls om breuke te vermenigvuldig en te deel bly steeds van toepassing. Bestudeer die volgende voorbeelde – let veral op na die faktorisering en kansellering.

$4x3y6y2 \div xy3x2 \times 2xy23x =$
$4x3y6y2 \times 3x2xy \times 2xy23x = 4x43$

$a2 - 92 \times 14a2 - 12a = a + 3a - 32 \times 14aa - 3 = a + 38a$

$3a + 65 \div a2 - 410 = 3a + 65 \times 10a2 - 4 = 3a + 25 \times 10a + 2a - 2 = 6a - 2$

Oefening:

Vereenvoudig:

1. $2ab2b3c \times 9ac24b \div 3ac2b2$

2. $2a + 1a - 22a - 23a + 3 \times 9a + 1a + 324a - 2 \div 3a + 1a + 32a - 22$

3. $4a2 + 8a2b + 4 \times 3b2 + 23a2 + 6a$

4. $x2 - 15x - 5 \div x + 1215x + 15$

5. $7x3xy \div 3x + 65x2y \div 5x - 103x2 - 12$

6. $5x2 + 5xx2 - x5x + 5x2 - 1$ (Hier is ‘n breuk gedeel

deur ‘n breuk – herskryf dit eers soos in 4)

C. **Optelling van breuke**

- Jy weet alreeds dat die optelling en aftrekking van breuke heelwat moeiliker is as vermenigvuldiging en deling. Dit is omdat ons slegs gelyksoortige breuke (met eenderse noemers) kan optel en aftrek. As die noemers verskil, moet jy die kleinste gemene veelvoud (KGV) van die noemers soek en dan elke breuk oor hierdie noemer skryf. Vereenvoudig dan die breuk. Vereenvoudig weer die antwoord so ver moontlik. Hier volg voorbeelde – al die stappe word getoon:

Vereenvoudig:

1. $5abx2cx + 4ac3x + cx2a$ (KGV = $6acx$)

$5abx2cx \times 3a3a + 4ac3x \times 2ac2ac + cx2a \times 3cx3cx = 15a2bx6acx + 8a2c26acx + 3c2x26acx = 15a2bx + 8a2c2 + 3c2x26acx$

2. $a + b2 + b + c3 - a + c6$ (LCD = 6) Let baie fyn op hoe die tekens hieronder hanteer word!

$3a + b6 + 2b + c6 - a + c6 = 3a + b + 2b + c - a + c6 = 3a + 3b + 2b + 2c - a - c6 = 2a + 5b + c6$

3. $a + 3a2 - 4 + 13a + 6 + 25a - 10$

Om die Kleinste Gemene Noemer te vind, faktoriseer eers die noemers!

a + 3 a + 2 a − 2 + 1 3 a + 2 + 2 5 a − 2

Kan jy sien die KGV is $3 \times 5 \times (a+2)(a–2)$?

a + 3 a + 2 a − 2 × 15 15 + 1 3 a + 2 × 5 a − 2 5 a − 2 + 2 5 a − 2 × 3 a + 2 3 a + 2

$= 15a+3+5a-2+6a+215a+2a-2 = 15a +45+5a-10+6a+1215a+2a-2 = 26a+4715a +2a-2$

Oefening:

Vereenvoudig die volgende uitdrukkings deur van faktorisering gebruik te maak:

1. $ax2-ax+5a2x$

2. $13+2x+12x-x-13x$

3. $4a-4b2a2-2b2-32a-2b$

4. $12a-2+23a+1-34a-3$

- ‘n Laaste wenk. Ons sou $2x-13x+3 \times 9x +31-x$ beter kon vereenvoudig as (1–x) so gelyk het: (x–1).
- Ons kan hierdie verandering maak as ons die teken van die hele tweeterm ook verander: (1–

x) = –(x–1) omdat –(x–1) = –x + 1, en dit is 1–x. Voltooi self die probleem.

Assessering

Leeruitkomstes(LUs)
LU 1
Getalle, Bewerkings en VerwantskappeDie leerder is in staat om getalle en die verwantskappe daarvan te herken, te beskryf en voor te stel, en om tydens probleemoplossing bevoeg en met selfvertroue te tel, te skat, te bereken en te kontroleer.
Assesseringstandaarde(ASe)
Ons weet dit as die leerder:
1.1 die historiese ontwikkeling van getallestelsels in ’n verskeidenheid historiese en kulturele kontekste (insluitend plaaslik) beskryf en illustreer;
1.2 rasionale getalle (insluitend baie klein getalle in wetenskaplike notasie) herken, gebruik en voorstel, en sonder huiwering tussen ekwivalente vorms in gepaste kontekste beweeg;
1.3 probleme in konteks oplos, insluitend kontekste wat gebruik word om ‘n bewustheid van ander leerareas, asook van menseregte-, sosiale,

ekonomiese en omgewingsake, te bevorder, soos:
1.3.1 finansiële kontekste (insluitend wins en verlies, begrotings, rekeninge, lenings, enkelvoudige en saamgestelde rente, huurkoop, wisselkoerse, kommissie, huur en die bankwese);
1.3.2 metings in die Natuurwetenskappe en Tegnologie;
1.4 probleme oplos wat verhouding, koers en proporsie (direkte en omgekeerde) behels;
1.5 skat en bereken deur geskikte bewerkings vir probleme te kies en te gebruik en die redelikheid van resultate te beoordeel (insluitend meetprobleme wat rasionale benaderings van irrasionale getalle behels);
1.6 'n verskeidenheid van tegnieke en instrumente (insluitend tegnologie) gebruik om berekeninge doeltreffend en met die nodige mate van akkuraatheid te doen, insluitend die volgende reëls en betekenisse van eksponente (leerders behoort in staat te wees om hierdie reëls en betekenisse slegs in berekeninge te gebruik):
1.6.1 $x^n \times x^m = x^{n+m}$
1.6.2 $x^n \div x^m = x^{n-m}$
1.6.3 $x^0 = 1$
1.6.4 $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
1.7 die eienskappe van rasionale getalle herken, beskryf en gebruik.
LU 2
Patrone, Funksies en AlgebraDie leerder is in staat om patrone en verwantskappe te herken, te beskryf en voor te stel, en probleme op te los deur

algebraïese taal en vaardighede te gebruik.
Ons weet dit as die leerder:

2.1 op verskillende maniere ‘n verskeidenheid numeriese en meetkundige patrone en verwantskappe ondersoek deur dit voor te stel en te veralgemeen, en deur die reëls onderliggend daaraan te verduidelik en te bewys (insluitend patrone in natuurlike en kulturele vorms en patrone wat die leerders self geskep het);

2.7 die distributiewe wet en manipuleringsvaardighede wat in graad 8 ontwikkel is gebruik om die volgende te doen:

- bepaal die produk van tweeterme;
- faktoriseer algebraïse uitdrukkings (beperk tot gemene faktore en die verskil van vierkante);

2.8 die eksponentwette gebruik om uitdrukkings te vereenvoudig en vergelykings op te los;

2.9 faktorisering om algebraïese uitdrukkings te vereenvoudig en vergelykings op te los gebruik.

Memorandum

Bespreking

Terminologie

- Leerders gebruik dikwels metodes vir gebruik met *uitdrukkings* wanneer hulle met *vergelykings*

werk (byvoorbeeld, hulle kan noemers in uitdrukkings weglaat), en andersom. Hou ‘n ogie hierop en leer hulle om die konteks te ondersoek voor hulle blindelings voortgaan.

- Vermenigvuldiging en faktorisering werk omgekeerd – die leerders moet hiervan bewus word. Dit maak in elk geval die werk makliker om te bemeester.
- As leerders nie terme en faktore kan onderskei nie, sal hulle nie uitdrukkings behoorlik kan manipuleer nie. As dit nodig blyk, kan hulle meer oefeninge gegee word.
- In die algemeen vind leerders breuke moeilik. Dit is dalk goed om in sulke gevalle met nie–algebraïse breuke te begin om die basis te vestig.

TOETS

1. Vereenvoudig die volgende uitdrukkings deur gelyksoortige terme bymekaar te maak.

1.1 $3a^2 + 3a^2 – 6a + 3a – 4 + 1$

1.2 $2y^2 – 1y + 2y^2 – 6 + 2y – 9$

1.3 $8x^2 – (5x + 12x^2 – 1) + x – 4$

1.4 $(3a – a^2) – [(2a^2 – 11) – (5a – 3)]$

2. Gee die antwoorde tot die volgende probleme in die eenvoudigste vorm:

2.1 Tel $3x^2 + 5x - 1$ by $x^2 - 3x$

2.2 Bereken die som van $2a + 3b - 5$ en $3 + 2b - 7a$

2.3 Trek $6a + 7$ af van $5a^2 + 2a + 2$

2.4 Hoeveel is $3a - 8b + 3$ minder as $a + b + 2$?

3. Vereenvoudig deur vermenigvuldiging en laat antwoord in eenvoudigste vorm:

3.1 $(3x^2) \times (2x^3)$

3.2 $(abc)(a^2c)(2b^2)$

3.3 $abc(a^2c + 2b^2)$

3.4 $-3a(2a^2 - 5a)$

3.5 $(a - 2b)(a + 2b)$

3.6 $(3 - x^2)(2x^2 + 5)$

3.7 $(x - 5y)^2$

3.8 $(2 - b)(3a + c)$

Memorandum

1.1 $6a^2 - 3a - 3$

1.2 $4y^2 + y - 15$

1.3 $-4x^2 - 4x - 3$

1.4 $-3a^2 + 8a + 8$

2.1 $4x^2 + 2x - 1$

2.2 $-5a + 5b - 2$

2.3 $5a^2 - 4a - 5$

2.4 $-2a + 9b - 1$

3.1 $6x^5$

3.2 $2a^3b^3c^2$

3.3 $a^3bc^2 + 2ab^3c$

3.4 $-6a^3 + 15a^2$

3.5 $a^2 - 4b^2$

3.6 $-2x^4 + x^2 + 15$

3.7 $x^2 - 10xy + 25y^2$

3.8 $6a + 2c - 3ab - bc$

TOETS

1. Bepaal die Grootste Gemene Faktor van hierdie drie uitdrukkings: $6a^2c^2$ en $2ac^2$ en $10ab^2c^3$.

2. Faktoriseer die volgende uitdrukkings volledig deur gemene faktore te bepaal:

2.1 $12a^3 + 3a^4$

2.2 $-5xy - 15x^2y^2 - 20y$

2.3 $6a^2c^2 - 2ac^2 + 10ab^2c^3$

3. Faktoriseer hierdie verskille van kwadrate volledig:

3.1 $a^2 - 4$

3.2 $19a^2 - 9b^2$

3.3 $x^4 - 16y^4$

3.4 $1 - a^4b^4$

4. Faktoriseer hierdie uitdrukkings so ver as moontlik:

4.1 $3x^2 - 27$

4.2 $2a - 8ab^2$

4.3 $a^2 - 5a - 6$

4.4 $a^2 + 7a + 6$

5. Vereenvoudig die volgende breuke deur van faktorisering gebruik te maak:

5.1 3a2 − 36a + 6

5.2 6x2y − 6y2x − 2

5.3 a2 − 92 × 14a2 − 12a

5.4 3x + 65 ÷ x2 − 415

5.5 abx2cx + 2ac3x + 3cx2a

5.6 2ax2 − 3ax + a2x

5.7 4a − 4b2a2 − 2b2 − 32a − 2b

5.8 23a + 2 + 13a − 1 − 14a − 5

Memorandum

1. $2ac^2$

2.1 $3a^3 (4 + a^2)$

2.2 $–5y (x + 3x^2y + 4)$

2.3 $2ac^2 (3a – 1 + 5b^2c)$

3.1 $(a + 2) (a – 2)$

3.2 $13a+3b13a-3b$

3.3 $(x^2 + 4y^2)(x + 2y)(x - 2y)$

3.4 $(1 + a^2b^2)(1 + ab)(1 - ab)$

4.1 $3(x + 3)(x - 3)$

4.2 $2a(1 + 4b)(1 - 4b)$

4.3 $(a + 1)(a - 6)$

4.4 $(a + 1)(a + 6)$

5.1 $a-12$

5.2 $3y(x + 1)$

5.3 $a+38a$

5.4 $9x-2$

5.5 $3a2bx+4a2c2+9c2x26acx$

5.6 $4a-5ax2x2$

5.7 $a-7b2a+ba-b$

5.8 $3a+94$

WISKUNDE

Graad 9

ALGEBRA EN MEETKUNDE

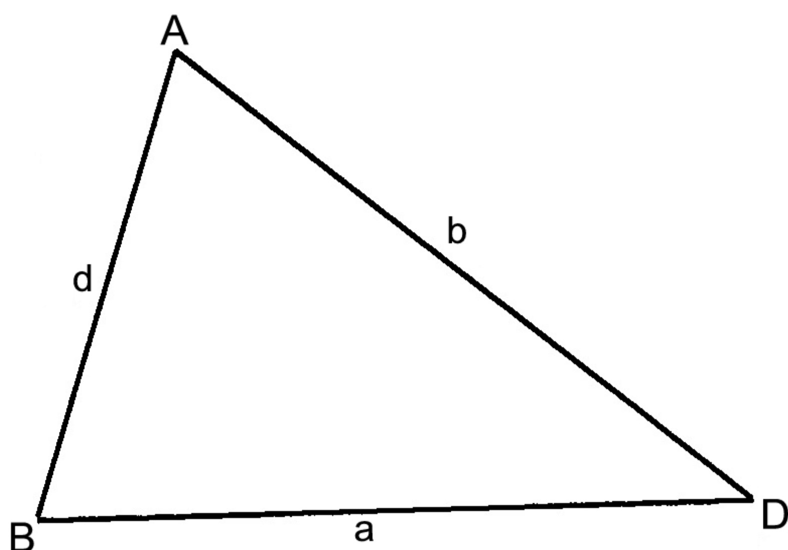
Module 8

MEETKUNDE VAN LYNE EN DRIEHOEKE

Meetkunde van lyne en driehoeke

Aktiwiteit 1

Om die gebruiklike benoeming van sye en hoeke in driehoeke te leer



Verwys na die driehoek om die terme te verstaan.Die drie sye van die driehoek is AB, AD en BD.‘n Sy in ‘n driehoek kan ook die naam van die oorstaande hoek as ‘n kleinletter kry. Die hoeke (vertekse) word met hoofletters geskryf. As □A	

of $\hat{A}$ gebruik word, verwys dit na die hoek wat sye BA en AD vorm. Ons kan die hoek ook ∠BAD of $B\hat{A}D$ noem. En as ek $A=38°$ gebruik, is dit duidelik wat ek bedoel. Ons benoem die driehoek ABD of ΔABD, met die letters in alfabetiese orde.

Oefening:

Teken die volgende tekening in die spasie

regs, om te wys dat jy begryp hoe die beskrywings

gebruik word:

Teken ΔQRT met $q=4$cm, ∠$T=65°$ en $QT=5{,}5$cm.

Sien jy dat dit nie nodig is om die lengte van t,

of die groottes van $\hat{Q}$ of $\hat{R}$ te weet nie? Maak eers

‘n rowwe skets om jou te help om jou werk te

beplan.

Opdrag:

Jy weet alreeds dat driehoeke volgens hulle vorm geklassifiseer word. Maak ‘n A4–grootte plakkaat vir jouself waarop die eienskappe van die volgende soorte driehoeke duidelik aangetoon word: gelyksydig, reghoekig, gelykbenig en ongelyksydig. Benoem die hoeke en sye soos hierbo verduidelik. Werk so noukeurig en netjies as moontlik.

Meet die sye en hoeke van jou driehoeke en vul dit in op die plakkaat.

Aktiwiteit 2

Om die beginsel van kongruensie in driehoeke te ondersoek

[LU 4.4, 3.3, 3.5]

In die vorige oefening het jy ΔQTR volgens gegewe spesifikasies geteken. Vra die ander leerders wat hierdie oefening gedoen het om jou hulle sketse te wys, en bevestig dat hulle mates perfek ooreenstem met dié wat gegee is. Meet nou die sy en twee hoeke wat nie gegee is nie om te sien of hulle met joune ooreenstem.

- Almal se driehoeke wat volgens die spesifikasies getrek is, is altyd eenders. Inderwaarheid is dit onmoontlik om die driehoek korrek te teken sodat dit verskil! Skryf (met jou maat) neer presies hoekom dit so is.
- Hier volg nog beskrywings van driehoeke.

Werk hulle ook soos ΔQTR? Met ander woorde, is dit ook onmoontlik om verskillende driehoeke te teken? Skryf weer jou siening van die situasie neer. Die laaste een is moeilik om te teken – probeer gerus!

- Teken ΔAGE met $a = 4$cm, $\angle E = 90^\circ$ en $AG = 5$cm.
- Teken ΔNOH met $HN = 4$cm, $\angle H = 56^\circ$ en $\angle O = 72^\circ$.
- Teken ΔBAT met $\angle B = 48^\circ$, $\angle T = 65^\circ$ en $\angle A = 67^\circ$.
- Teken ΔMOD met $m = 5{,}5$cm, $\angle O = 65^\circ$ en $DM = 4$cm.
- Teken ΔAMP met $a = 4{,}2$cm, $m = 5$cm en $p = 5{,}6$cm.

- In al die driehoeke hierbo spesifiseer ons net drie van die ses moontlike mates (drie sye en drie hoeke). Partykeer was dit genoeg om te verseker dat almal identiese driehoeke sou teken. Maar in ΔBAT en ΔMOD was die drie mates nie genoeg om identiese driehoeke van almal te verseker nie.
- So, wanneer is drie genoeg? Dalk het jy alreeds die geheim uitgedink:

ΔQRT: Twee sye en die hoek tussen hulle is gegee.

ΔAGE: ‘n Regte hoek, die skuinssy en nog ‘n sy is gegee.

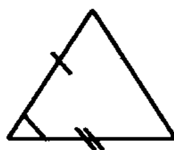
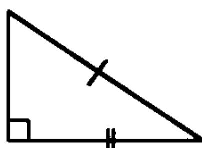
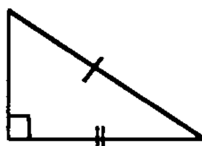
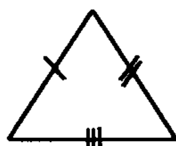
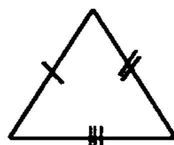
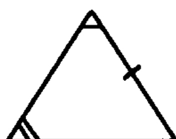
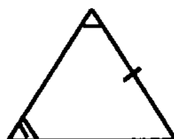
ΔNOH: Een sy en twee hoeke is gegee.

ΔAMP: Drie sye is gegee.

ΔBAT: Drie hoeke is gegee, maar daar is niks gesê van die driehoek se grootte nie!

ΔMOD: Twee sye en die hoek nie tussen die twee sye, is gegee. Dus kan dit gebeur dat sommige leerders ‘n kort OM sy en sommige ‘n lang OM sy sou teken; omdat die lengte van OM nie gespesifiseer word nie!

- Twee driehoeke wat presies eenders is – beide vorm en grootte – noem ons *kongruent*. Dit beteken dat as jy een uitknip, dit presies op die ander een sal pas. Jy sal later sien dat ons die woord vir ander identiese vorms ook kan gebruik, maar nou hou ons eers by driehoeke.
- Vanuit die skets–oefening is dit duidelik dat daar vier verskillende maniere is om kongruente driehoeke te verseker. Hier is die vier – met hulpsketse:

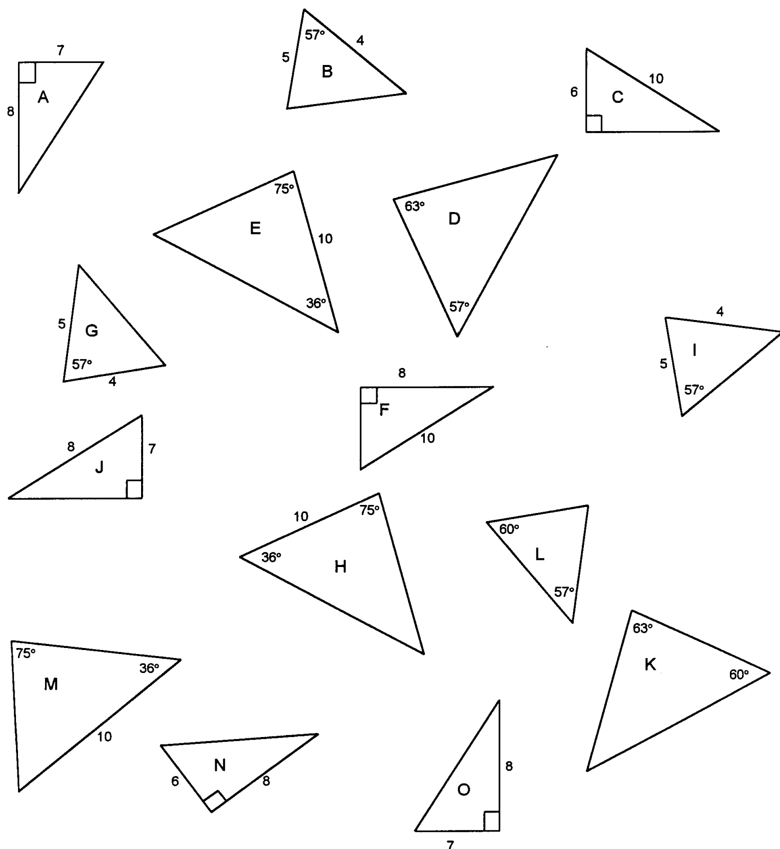









Geval 1: Twee driehoeke met twee sye en die ingeslote hoek gelyk, is kongruent.Geval 2: Twee reghoekige driehoeke met die skuinssy en nog ‘n sy gelyk, is kongruent.Geval 3: Twee driehoeke met drie gelyke sye, is kongruent.Geval 4: Twee driehoeke met twee hoeke	

en ooreenkomstige sye gelyk, is kongruent. Die gelyke sy moet teenoor ooreenkomstige hoeke wees.

Ondersoek:

In die volgende oefening is daar 15 driehoeke, A tot O. Hulle is doelbewus deurmekaar en in vreemde posisies. Werk in ‘n groep van 4 of 5 om te besluit of enige daarvan kongruent is. Groepeer die name van dié wat kongruent is, met redes en verduidelikings. Dis nie ‘n eenvoudige oefening nie – dis meer soos ‘n raaisel. Jy moet al jou ondervinding, gesonde verstand en logika inspan. Moenie iets meet nie – die mates is nie bedoel om akkuraat te wees nie.



Aktiwiteit 3

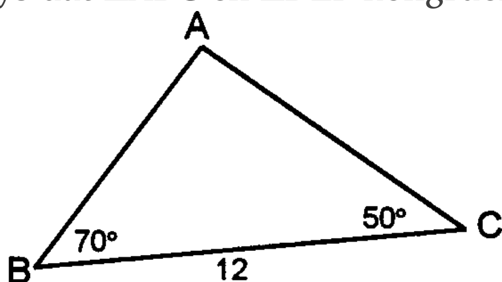
Om die vier gevalle van kongruensie in probleme toe te pas

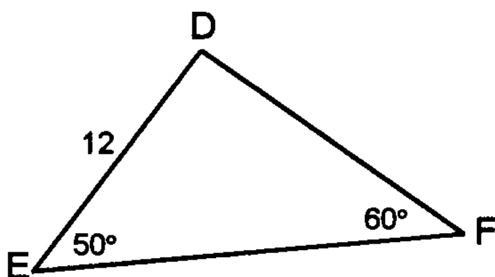
[LU 4.4, 3.3, 3.4]

- As jy moet aantoon dat twee driehoeke kongruent is (soos in die vorige oefening), is daar sekere stappe om uit te voer: Besluit eers watter kongruensie–geval van toepassing is . Sê

hoekom elk van die drie items gelyk is. Skryf dan jou afleidings in die regte volgorde neer. Hier volg ‘n voorbeeld van die prosedure. Die simbool □ toon kongruensie. Dus: As ons weet dat drie spesiale items gelyk is, dan weet ons dat alles verder gelyk is!

Bewys dat ΔABC en ΔDEF kongruent is.





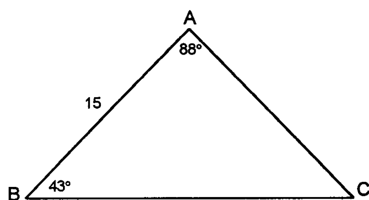
1. $\hat{A} = 60^\circ$ omdat die som van die hoeke van ‘n driehoek 180° is. Dus, $\hat{A} = \hat{F}$, want albei is	

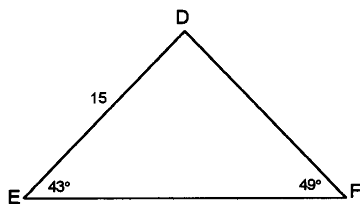
60°.2. $\hat{C} = \hat{E}$ omdat beide 50° is.3. $BC = DE$, want beide is 12 eenhede en hulle is teenoor gelyke hoeke. In elke driehoek is daar dus twee gelyke hoeke en een ooreenstemmende gelyke sy. Ons skryf: ΔABC □ ΔDEF (□□S) wat beteken: ΔABC is kongruent aan ΔDEF omdat twee hoeke en ‘n ooreenstemmende sy gelyk is. Dit beteken alles is verder ook gelyk.

Neem die oefening in die vorige deel en doen ten minste drie kongruensies op hierdie manier.

Oefening:

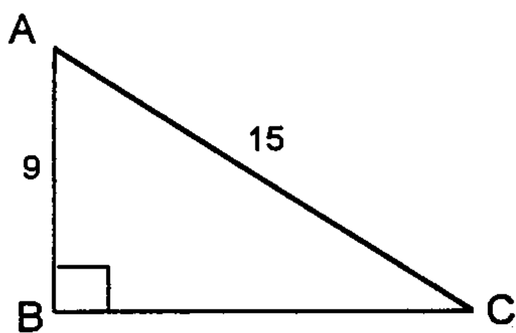
Bewys dat die twee driehoeke in elk van die volgende probleme kongruent is.

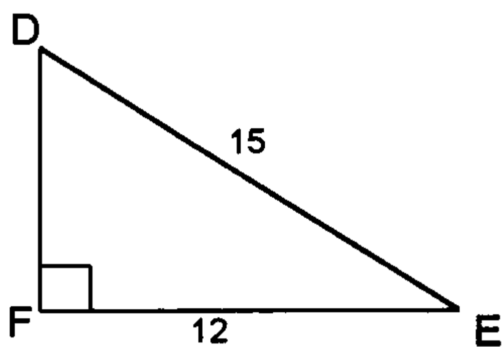




1.

2.





3.

Aktiwiteit 4

Om die beginsel van gelykvormigheid in driehoeke te begryp

[LU 1.2, 1.4, 3.5]

- In ‘n vorige oefening moes jy ΔBAT met $\angle B = 48^\circ$, $\angle T = 65^\circ$ en $\angle A = 67^\circ$ teken. Jy het seker agtergekom dis moontlik om baie driehoeke volgens hierdie spesifikasies te teken, maar hulle was nie kongruent nie, want niks het die grootte van die driehoek bepaal nie – dus was sommige kleiner as ander.
- Werk in groepies van vier of vyf. Meet die sye van jou driehoek. Elkeen meet sy eie Δ BAT om sy ry in die tabel te voltooi. Waar jy deel, skryf die antwoord afgerond tot een desimale plek.

Leerder	AB	AT	BT	BT □ AT	AB □ AT	BT □ AB

- In die volgende oefening moet jy twee gelykbenige driehoeke teken met hoeke 80°, 50° en 50°. Skets die driehoek ongeveer twee– of drie keer groter as die ander. Werk baie akkuraat.
- Noem die klein driehoek DEF (□F = 80°) en die grote OPT (□T = 80°). Meet al die sye en voltooi die tabel uit jou mates.

OP	PT	OT	DE	EF	DF	OP □ DE	PT □ EF	OT □ DF

Opdrag:

- Bestudeer die twee tabelle (veral die laaste drie kolomme van beide tabelle). Wat let jy op?
- Skryf ‘n duidelike verduideliking oor hoekom hierdie berekenings só uitwerk.
- Hierdie driehoeke is nie kongruent nie omdat hulle nie ewe groot is nie, selfs al is die hoeke gelyk. As twee driehoeke gelyke hoeke het, maar nie ewe groot is nie, noem ons hulle *gelykvormig*.

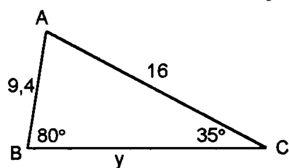
- Die teken is □□□, dus: ΔDEF □□□ ΔOPT uit vorige tabel.
- Alle driehoeke met drie gelyke hoeke is outomaties *gelykvormig*. As hulle ewe groot is, is hulle boonop *kongruent*.
- Die sye van gelykvormige driehoeke is in verhouding. Ons sien dit duidelik uit die twee vorige tabelle. Die breuke wat ons bereken het, gee ons die verhoudings van die onderskeie sye.
- Uit die eerste tabel is dit duidelik dat die verhoudings van die sye van elke driehoek dieselfde is as die sye van ander gelykvormige driehoeke. In die tweede tabel is die verhoudings van ooreenstemmende sye van twee gelykvormige driehoeke dieselfde. Hierdie verhouding noem ons die *konstante verhouding* van die twee driehoeke.
- Ons kan twee afleidings maak uit die feite oor gelykvormige driehoeke:

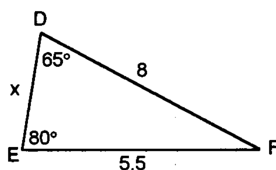
- Eerstens, twee driehoeke met gelyke hoeke (*gelykhoekige driehoeke*) is gelykvormig, en dus moet die sye in verhouding wees.
- Tweedens, twee driehoeke met sye in verhouding is gelykvormig, en dus moet die hoeke gelyk wees.

Voorbeeld:

Bestudeer die twee driehoeke en bereken die

waardes van x en y.





Is die driehoeke gelykvormig? Is die hoeke gelyk? Is die sye in verhouding? In hierdie probleem sien ons maklik dat die hoeke gelyk is, maar ons het nie genoeg inligting oor die sye nie. In ander probleme is dit dalk andersom.

Sit dit so uiteen:

1. □A = 65° omdat die hoeke van ΔABC saam 180° maak.

□F = 35° omdat die hoeke ΔDEF saam 180° maak.

2. Die hoeke van die driehoek is gelyk en dus is die driehoeke gelykvorming:

ΔABC □□□ ΔDEF (gelykhoekig).

3. Dit beteken dat die sye in verhouding moet wees.

4. Bereken die konstante verhouding. AC = 16 en DF = 8.

- Omdat hierdie sye beide teenoor 80° hoeke is, stem hulle posisies ooreen.
- Die proporsionele konstante is 168 = 2. As ons

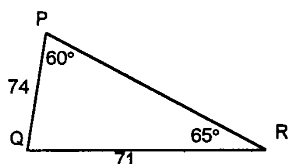
‘n sy van die klein driehoekie met 2 *vermenigvuldig,* gee dit ons die lengte van die ooreenkomstige sy in die groot driehoek. As ons ‘n sy van die groot driehoek deur 2 deel, kry ons die lengte van die ooreenkomstige sy in die klein driehoekie.

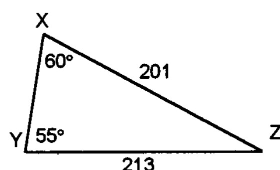
5. Ons bereken nou die waarde van x deur 9 deur 2 te deel: x $= \mathbf{2}$ □ 9,4 $= 4{,}7$.

6. En y $= \mathbf{2} \times 5{,}5 = 11$.

Oefening:

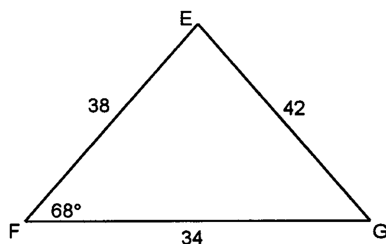
Bereken die lengtes van die twee sye PR en XY in hierdie twee driehoeke.

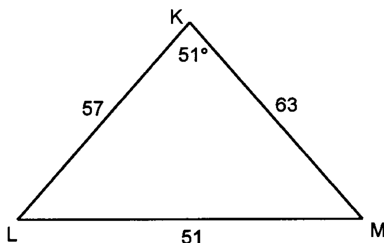




Voorbeeld:

Indien moontlik, bereken die groottes van al die ontbrekende hoeke :





1. Die sye is in verhouding: $42 \times 1,5 = 63$, $38 \times 1,5 = 57$ en $34 \times 1,5 = 51$

2. Dit beteken die driehoeke is gelykvormig: ΔEFG □□□ ΔKLM (sye in verhouding)

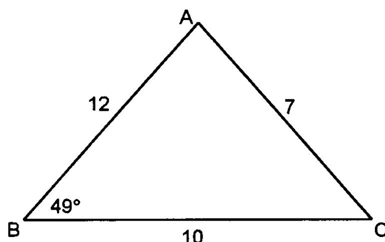
3. Dus: ooreenstemmende hoeke is gelyk: □L $= 68^\circ$ (stem ooreen met □F)

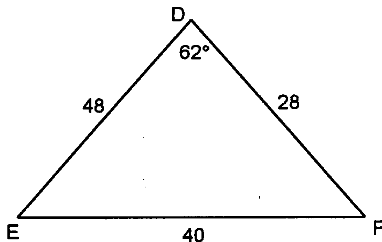
□E $= 51^\circ$ (stem ooreen met □K)

□G = □M $= 61^\circ$ (som van die hoek van ‘n driehoek)

Oefening:

Bereken al die ontbrekende hoeke in hierdie driehoeke:





Aktiwiteit 5

Om gelykvormigheid in probleme toe te pas

[LU 4.4, 1.4, 3.5]

In die volgende probleme moet jy sketse van die

gegewe driehoeke maak, maar jy moet NIE akkurate tekeninge maak nie.

1. Is die volgende driehoeke gelykvormig?

1.1 ΔBAG met □B $= 90^\circ$, AG $=$ 15cm en AB $=$ 9cm en

ΔPOT met □P $= 90^\circ$, OT $=$ 5cm en PO $=$ 4cm.

1.2 ΔREM met □R $= 60^\circ$ en □M $= 50^\circ$ en

ΔSUP met □U $= 70^\circ$ en □S $= 50^\circ$.

1.3 ΔLOP met □P $= 90^\circ$, LO $=$ 13cm en OP $=$ 12cm en

ΔCAT met □C $= 90^\circ$, AC $=$ 16cm en CT $=$ 12cm.

2. Bereken die konstante verhouding in die gelykvormige driehoeke ΔABC en ΔDEF met

AB $=$ 36cm, EF $=$ 12cm, □C $= 48^\circ$ en □D $= 48^\circ$.

3. Twee vlagpale (een langer as die ander) gooi skaduwees op die grond. Die skaduwee van die lang paal (wat 8m hoog is) is 3m, en die kort paal het ‘n 2,5m skaduwee. Bereken hoe lank die kort vlagpaal is.

4. Gloria ontwerp ‘n logo vir haar skool se rekenaarklub. Die ontwerp het ‘n rekenaar langs ‘n

stapel boeke wat 50 % hoër is as die rekenaar. Sy gebruik ‘n kopieermasjien om die ontwerp te verklein. Op die kopie is die rekenaar 18cm hoog en op die oorspronklike skets is die stapel boeke 54cm hoog. Met watter proporsionele faktor het sy die skets kleiner gemaak?

Assessering

Leeruitkomstes(LUs)
LU 1
Getalle, Bewerkings en VerwantskappeDie leerder is in staat om getalle en die verwantskappe daarvan te herken, te beskryf en voor te stel, en om tydens probleemoplossing bevoeg en met selfvertroue te tel, te skat, te bereken en te kontroleer.
Assesseringstandaarde(ASe)
Ons weet dit as die leerder:
1.1 die historiese ontwikkeling van getallestelsels in ’n verskeidenheid historiese en kulturele kontekste (insluitend plaaslik) beskryf en illustreer;
1.2 rasionale getalle (insluitend baie klein getalle in wetenskaplike notasie) herken, gebruik en voorstel, en sonder huiwering tussen ekwivalente vorms in gepaste kontekste beweeg;

1.3 probleme in konteks oplos, insluitend kontekste wat gebruik word om ‘n bewustheid van ander leerareas, asook van menseregte-, sosiale, ekonomiese en omgewingsake, te bevorder, soos:

1.3.1 finansiële kontekste (insluitend wins en verlies, begrotings, rekeninge, lenings, enkelvoudige en saamgestelde rente, huurkoop, wisselkoerse, kommissie, huur en die bankwese);

1.3.2 metings in die Natuurwetenskappe en Tegnologie;

1.4 probleme oplos wat verhouding, koers en proporsie (direkte en omgekeerde) behels;

1.5 skat en bereken deur geskikte bewerkings vir probleme te kies en te gebruik en die redelikheid van resultate te beoordeel (insluitend meetprobleme wat rasionale benaderings van irrasionale getalle behels);

1.6 ’n verskeidenheid van tegnieke en instrumente (insluitend tegnologie) gebruik om berekeninge doeltreffend en met die nodige mate van akkuraatheid te doen, insluitend die volgende reëls en betekenisse van eksponente (leerders behoort in staat te wees om hierdie reëls en betekenisse slegs in berekeninge te gebruik):

1.6.1 $x^n \times x^m = x^{n+m}$

1.6.2 $x^n \div x^m = x^{n-m}$

1.6.3 $x^0 = 1$

1.6.4 $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

1.7 die eienskappe van rasionale getalle herken, beskryf en gebruik.

LU 2

Patrone, Funksies en AlgebraDie leerder is in staat om patrone en verwantskappe te herken, te beskryf en voor te stel, en probleme op te los deur algebraïese taal en vaardighede te gebruik.

Ons weet dit as die leerder:

2.1 op verskillende maniere ‘n verskeidenheid numeriese en meetkundige patrone en verwantskappe ondersoek deur dit voor te stel en te veralgemeen, en deur die reëls onderliggend daaraan te verduidelik en te bewys (insluitend patrone in natuurlike en kulturele vorms en patrone wat die leerders self geskep het);

2.7 die distributiewe wet en manipuleringsvaardighede wat in graad 8 ontwikkel is gebruik om die volgende te doen:

- bepaal die produk van tweeterme;
- faktoriseer algebraïse uitdrukkings (beperk tot gemene faktore en die verskil van vierkante);

2.8 die eksponentwette gebruik om uitdrukkings te vereenvoudig en vergelykings op te los;

2.9 faktorisering om algebraïese uitdrukkings te vereenvoudig en vergelykings op te los gebruik.

LU 3

Ruimte en Vorm (Meetkunde)Die leerder is in staat om eienskappe van en verwantskappe tussen tweedimensionele vorms en driedimensionele voorwerpe in ‘n verskeidenheid oriëntasies en posisies te beskryf en voor te stel.

Ons weet dit as die leerder:

3.1 meetkundige figure en driedimensionele

voorwerpe in natuurlike en kulturele vorms en meetkundige agtergrond herken, visualiseer en benoem, insluitend:

3.1.1 reëlmatige en onreëlmatige veelhoeke en veelvlakke;

3.1.2 sfere;

3.1.3 silinders;

3.2 die onderlinge verwantskappe van meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe se eienskappe met bewyse in kontekste, insluitend dié wat gebruik kan word om ‘n bewustheid van sosiale, kulturele en omgewingsake te bevorder beskryf, insluitend:3.2.1 kongruensie en reguitlynmeetkunde;

3.3 die meetkunde van reguitlyne en driehoeke gebruik om probleme op te los en verwantskappe in meetkundige figure te bewys;

3.4 meetkundige figure teken en/of konstrueer en modelle maak van driedimensionele voorwerpe om die eienskappe daarvan en van modelsituasies in die omgewing te ondersoek en vergelyk;

3.5 transformasies, kongruensie en gelykvormigheid gebruik om die eienskappe van meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe te ondersoek (alleen en/of as ‘n lid van ‘n span of groep), insluitend toetse vir die gelykvormigheid en kongruensie van driehoeke.

LU 4

MetingDie leerder is in staat om gepaste meeteenhede, -instrumente en formules in ’n verskeidenheid kontekste te gebruik.

Ons weet dit as die leerder:

4.1 verhoudings- en koersprobleme wat tyd, afstand en spoed behels, oplos;

4.2 probleme oplos – insluitend probleme in kontekste wat gebruik kan word om ‘n bewustheidvan menseregte-, sosiale, ekonomiese, kulturele en omgewingsake te bevorder – wat bekende meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe in ’n verskeidenheid meetkontekste behels, deur die volgende te doen:

4.2.1 meet noukeurig en kies meetinstrumente wat geskik vir die probleemis;

4.2.2 skat en bereken noukeurig;

4.2.3 kies en gebruik geskikte formules en meeteenhede;

4.3 die ontwikkeling van meetinstrumente deur die geskiedenis heen in verskillende kulture beskryf en illustreer;.

4.4 die Stelling van Pythagoras gebruik om probleme op te los wat ontbrekende lengtes in bekende meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe behels.

Memorandum

Meetkunde

Bespreking

Wys leerders op die verwantskap tussen hoekgroottes en lengtes van oorstaande sye, m.a.w. dat die grootste hoek teenoor die langste sy is, ens. In hierdie verband is die volgende stellings van belang:

In ΔABC:

As $b^2 = a^2 + c^2$, dan $\hat{B} = 90^\circ$

As $b^2 > a^2 + c^2$, dan $\hat{B} > 90^\circ$

As $b^2 < a^2 + c^2$, dan $\hat{B} < 90^\circ$

- Deur konstruksie kan hierdie verwantskappe maklik bevestig word. As daar tyd is, sou dit 'n goeie bekendstellingsoefening wees.
- Vele leerders kom in graad 9 in sonder 'n begrip van die belangrikheid van die keuse van hoogte en basis van 'n driehoek vir die berekening van oppervlakte. Bevestig weer aan hulle dat die hoogte gemeet word vanaf die hoekpunt oorstaande tot die basis, loodreg op die basis. Hierdie punt word baie duidelik as leerders 'n oefening doen om verskillende ongelykhoekige driehoeke te teken en drie hoogtelyne te trek en dan die oppervlakte driekeer uit te werk.

Kongruensie

In die eerste oefening van aktiwiteit 3.2 moet die leerders liefs nie in groot groepe saamwerk nie – pare sou goed wees. Die doel is om soveel moontlik verskillende weergawes van die driehoek te verkry, om sodoende te toon wanneer hulle kongruent is en wanneer nie. Heel beste is om hierdie oefening as huiswerk te gee as die leerders dit sonder hulp sou kon voltooi.

Wanneer die vier kongruensie-gevalle bespreek word, let op dat twee reghoekige driehoeke wel kongruent is as twee nie-skuissy sye onderskeidelik gelyk is; nie deur die *RHS*-reël nie, maar wel deur *SS*□.

Leerders moet ook gewoond raak aan figure wat nie volgens skaal geteken is nie – en dat die gegewe mate op die skets gebruik moet word. Tensy gevra moet hulle nie kenmerke meet nie.

Antwoorde op pas-oefening:

A □ *O* (*SSS* of *RHS* uit berekende skuinssy, Pythagoras)

B □ *G* (*S*□*S*) Nie kongruent aan I nie; die gegewe hoek is nie ingeslote nie

C □ *F* □ *N* (*SSS* of *RHS* uit berekende skuinssy)

D, L en K is nie kongruent nie – slegs hoeke is gegee

E □ H (□□S) Nie kongruent aan M nie; die gegewe sy is nie in ooreenstemmende posisie nie

- Streng bewysvoering word nie van graad 9-leerders verwag nie. Een van die grootste waardes van meetkunde, egter, is dat leerders geleer word om op ‘n logiese en streng wyse te werk te gaan. Leerders wat besonder by so ‘n benadering sou baat behoort aangemoedig word om so te werk, veral met die oog op verdere studie.

Kongruensiebewyse:

1. □$C = 180° – 88° – 43° = 49° =$ □F (som van hoeke van Δ)

□$B = 43° =$ □E (gegee)

$AB = 15 = DE$ oorkant 49°–hoeke (gegee)

ΔABC □ ΔDEF (□□S)

2. $BC = 12 = FE$ (Pythagoras)

$AC = 15 = DE$ (gegee)

Reghoekige driehoeke

ΔABC □ ΔDFE (RHS)

3. $BC = BC$ (gemene / gedeelde sy)

□$B = 55^\circ =$ □C (gegee)

□$A =$ □D (gegee; sien merkie)

ΔABC □ $\Delta DCB(RHS)$

Gelykvormigheid

Met ‘n fotokopieerder kan opvoeders nog oefeninge ontwerp wat die beginsels van gelykvormigheid goed illustreer deur direkte meting.

Oefening:

□$Q = 55^\circ$ en □$Z = 65^\circ$

ΔPQR □□□ ΔXYZ (gelykhoekig)

$213 = 3(71)$

$PR = 201$ □ $3 = 67$ en $XY = 74 \times 3 = 222$

$DE = AB \times 4$, $DF = AC \times 4$ and $EF = BC \times 4$

ΔABC □□□ ΔDEF (sye in verhouding)

Ooreenstemmende hoeke moet gelyk wees

□$A =$ □$D = 62^\circ$; □$E =$ □$B = 49^\circ$ en □$C =$ □$F = 69^\circ$ (som van hoeke van Δ)

Oefening uit aktiwiteit 3.5:

1.1 Ja, Pythagoras gee $BG = 12$ cm en $PT = 3$ cm; sye in verhouding

1.2 Ja, $\angle E = 70^\circ = \angle U$ en $\angle P = 60^\circ = \angle R$ (hoeke van driehoek); gelykhoekig

1.3 Nee, $LP = 5$ cm en $AT = 20$ cm (Pythagoras); maar sye nie in verhouding

2. Konstante verhouding $= 36 \div 12 = 3$

3. Kort vlagpaal is 6,67 m hoog

4. Stapel boeke op kopie is $18 \div 2 \times 3 = 27$ cm hoog

$54 \div 27 = 2$ is die faktor waarmee ontwerp verklein is.

Toets

Hierdie eenheid het nie ‘n toets nie.

WISKUNDE

Graad 9

ALGEBRA EN MEETKUNDE

Module 7

VORM EN RUIMTE

Aktiwiteit 1

Om die struktuur van sommige regte prismas te

verstaan

[LU 3.3, 3.4]

A. **Bou houers**

Daar sal aan jou ‘n vel papier met vorms gegee word. Jy benodig ‘n liniaal waarmee jy kan meet, ‘n skêr en gom of kleefband. Kleurpotlode sal ook help. Doen die volgende:

1. Meet al die lyne en skryf jou mate netjies neer (jy behoort tot die naaste half-millimeter te kan meet). Doen ook jou bes om die deursnee (of die radius) van die sirkel te meet. As jy ‘n gradeboog beskikbaar het, bepaal ook waar die 90° hoeke is.
2. Bepaal nou die oppervlaktes van al die vorms vanuit jou mates. Tel die verskillend dele bymekaar om die totale oppervlaktes van die vier verskillende vorms te bereken. Sit jou werk versigtig uiteen sodat enigeen kan begryp wat jy doen. Gebruik die regte name vir die vorms waarmee jy werk.

Byvoorbeeld, vir die laaste figuur sou dit so lyk:

Totale oppervlakte = klein reghoek + klein reghoek + groot reghoek

$= (l \times b) + (l \times b) + (l \times b)$

ensovoorts . . . (Onthou om altyd geskikte eenhede te gebruik.)

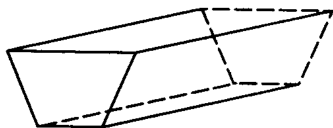
1. Sny nou die vorms versigtig uit. Jy kan hulle inkleur as dit jou sou help om die bokant en onderkant van die sykante (met die strepe) te onderskei. Vou die vorms nou en gebruik kleefband of gom en papierstrokies om vier houertjies te maak. Hou die kante met die strepe aan die buitekant.
2. Skryf die Totale Buite-Oppervlakte (TBO) van elke vorm neer. (Dis wat jy reeds bereken het!)
3. Werk saam in groepies van drie of vier en probeer uitwerk hoeveel 1cm $\times$ 1cm blokkies in elk van die houers sou inpas. Hierdie waarde is volume van die houer. As julle ‘n metode of formule kan vind wat vir elkeen van die vorms sou werk, skryf dit sorgvuldig neer.
4. As jy klaar is met hierdie oefening behoort jy twee formules te hê.

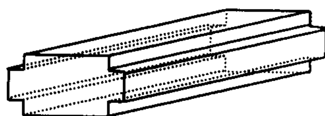
B. **Regte prismas**

- Hierdie vier houers is elk ‘n *regte prisma*. Hierdie vorms het ‘n basis en ‘n bokant wat presies dieselfde grootte en vorm het, met sye wat reguit boontoe loop en ‘n 90° hoek vorm met die basis. Soek vir jou items wat aan hierdie vereistes voldoen en dus regte prismas is.
- Ons benoem regte prismas volgens die vorm

van die basis, byvoorbeeld vierkantige prisma, reghoekige prisma, driehoekige prisma en sirkelvormige prisma (silinder).

- Is hierdie twee vorms regte prismas? Beskryf die vorm van elkeen se basis en bevestig of die sye regop loop teen 90° met die basis.





C. **Formules**

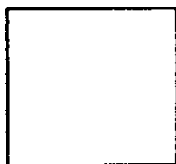
- Om die totale buite-oppervlakte (TBO) en volume (V) van enige regte prisma te bereken, gebruik ons die volgende algemene formules: (Let op dat H na die prisma se hoogte verwys.)

TBO = 2 × basisoppervlakte + sy-oppervlakte en
V = basisoppervlakte × prismahoogte

Die volgende voorbeelde is belangrik. Dit is die vier houers wat jy uitgesny en gevou het. Let op dat elke afdeling van die berekening apart gedoen word en dan uiteindelik in die formule ingestel word.

1. Vierkant–prisma:

TBO = 2 basisoppervlakte + sy-oppervlakte = (2 × s2) + (H × basisomtrek)



$s = 28mm$

Stap 1: Bepaal waar die basis is en skets dit saam met die afmetings.

Stap 2: Bereken die basisoppervlakte.

$\text{Basisoppervlakte} = s^2 = 28^2 = 784\text{ mm}^2$

Stap 3: Bereken die basisomtrek.

$\text{Basisomtrek} = 4 \times s = 112mm$

Stap 4: Skryf die prismahoogte neer

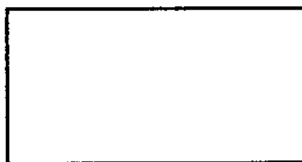
$H = 52mm$

Stap 5: Bereken die TBO en V.

$V = 784 \times 52 = 40\,768\text{ mm}^3 \approx 40{,}7\text{ cm}^3$

$TBO = (2 \times 784) + (52 \times 112) = 7\,392\text{ mm}^2 \approx 73{,}9\text{ cm}^2$

1. Reghoek-prisma:



TBO = 2 basisoppervlakte + sy-oppervlakte = 2 (l × b) + (H × basisomtrek)

1 = 41mm; b = 14mm

Stap 1: Bepaal waar die basis is en skets dit saam met die afmetings.

Stap 2: Bereken die basisoppervlakte.

Basisoppervlakte = l × b = 41 × 14 = 574 mm^2

Stap 3: Bereken die basisomtrek.

Basisomtrek = 2 (14 + 41) = 110mm

Stap 4: Skryf die prismahoogte neer

H = 54mm

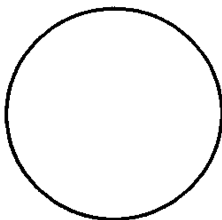
Stap 5: Bereken die TBO en V.

V = 574 × 54 = 30 996 mm^3 ≈ 31 cm^3

TBO = (2 × 574) + (54 × 110) = 7 088 mm^2 ≈ 70,1 cm^2

1. Silinder:

TBO = 2 basisoppervlakte + sy-oppervlakte = 2 (πr^2) + (H × basisomtrek)



r = 17,5mm

Stap 1: Bepaal waar die basis is en skets dit saam met die afmetings.

Stap 2: Bereken die basisoppervlakte.

Basisoppervlakte = $\pi r^2 = 3{,}14159 \times (17{,}5)^2 \approx 962{,}1\text{mm}^2$

Stap 3: Bereken die basisomtrek.

Basisomtrek = $2 \pi r$ = 109,956mm

Stap 4: Skryf die prismahoogte neer

H = 60,5mm

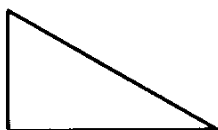
Stap 5: Bereken die TBO en V.

V = $962{,}1 \times 60{,}5 \approx 58\ 207{,}8\ \text{mm}^3 \approx 58\ \text{cm}^3$

TBO = (2 × 962,1) + (60.5 × 109,956) ≈ 8 576,55 mm^2 ≈ 85,8 cm^2

1. Driehoek-prisma:

TBO = 2 basisoppervlakte + sy-oppervlakte = 2 (½ × b × h) + (H × basisomtrek)



b = 43,5mm; h = 31,5mm skuinssy = 53,7mm (Pyth.)

Stap 1: Bepaal waar die basis is en skets dit saam met die afmetings.

Stap 2: Bereken die basisoppervlakte.

Basisoppervlakte = ½ b × h = 685,125 ≈ 685,1mm^2

Stap 3: Bereken die basisomtrek.

Basisomtrek = b + h + skuinssy ≈ 128,7mm

Stap 4: Skryf die prismahoogte neer

H = 60,5mm

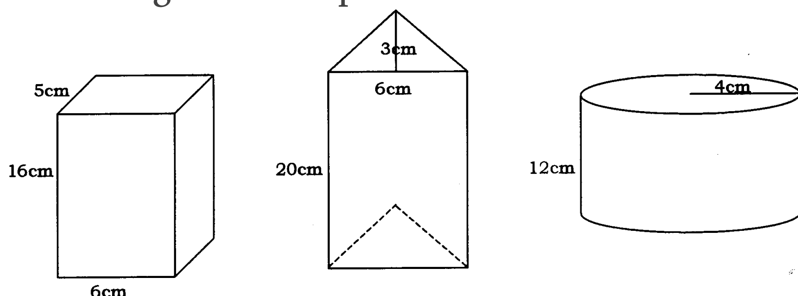
Stap 5: Bereken die TBO en V.

V = 685,1 × 60,5 ≈ 41 450,1 mm3 ≈ 41 cm3

TBO = (2 × 685,1) + (60.5 × 128,7) ≈ 9 157,06 mm2 ≈ 91,6 cm2

Oefening:

Bereken die totale buite-oppervlakte en die volume van die volgende drie prismas.



Opdrag om in pare te doen:

- Help Ouma haar probleem oplos. Sy het ‘n pot perskekonfyt gekook. Die konfyt is 2 cm vanaf die boonste rand van die kastrol met deursnit 24 cm en hoogte 21cm.
- Sy het mooi konfytbotteltjies wat sy graag tot ongeveer ½ cm van bo-af wil volmaak.
- Ouma het twee tipes botteltjies. Die bruines het ‘n vierkantige basis (8 cm × 8 cm) en is 12 cm hoog, en die geles het ‘n basis van 6,5 cm × 11,5 cm en is 11 cm hoog. Sy het elf van elke soort.
- Haar probleem is dat sy slegs een soort botteltjie vir die perskekonfyt wil gebruik. Dit

beteken dat sy nie die een soort wil begin gebruik om net agter te kom dat sy nog konfyt oor het as al elf vol is nie.
- Jou taak is om uit te vind of sy genoeg botteltjies van een soort het om al die konfyt te bevat, en om dan ‘n aanbeveling te maak oor watter soort botteltjie om te gebruik.

Aktiwiteit 2

Om vertroud te raak met verskeie twee- en driedimensionele figure

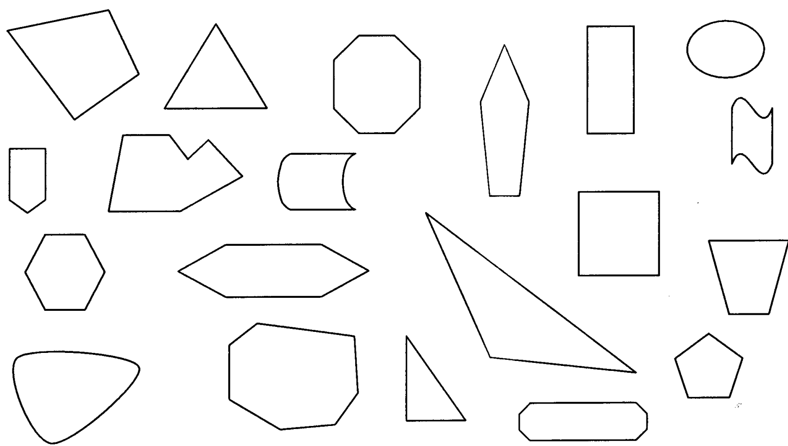
[LU 3.1, 3.5]

A. **Tweedimensionele figure**

Dit is figure wat op ‘n vel papier geteken kan word. Hulle is dus plat figure. Daar is natuurlik ontelbaar baie sulke figure.

Veelhoeke (poligone) is *geslote* figure met drie of meer reguit sye. As al die sye ewe lank is en al die binnehoeke ewe groot, praat ons van reëlmatige veelhoeke. Driehoeke is driesydige veelhoeke, en ‘n gelyksydige driehoek is ‘n reëlmatige driesydige veelhoek. ‘n Vierkant is ‘n reëlmatige viersydige veelhoek. *Penta*gone (vyfhoeke) het vyf sye, heksagone het ses sye en heptagone het sewe. Maak ‘n lys van al hierdie spesiale name wat jy kan opspoor.

Hier is ‘n klompie geslote plat figure; kleur hulle in, en skryf die naam van elk op die vorm.



B. **Ondersoek**

Kies vier veelhoeke uit die boonste oefening; almal reëlmatig, maar met verskillende aantal sye. Meet nou die binnehoeke van elk. Probeer uitvind of daar dalk ‘n formule bepaal kan word wat kan voorspel hoe groot die hoeke is, en wat die som van die hoeke sal wees.

Die volgende tabel sal help. Soos jy kan aflei, is daar oneindig veel poligone.

Aantal sye	a = binnehoek	b = 360 – a	c = b – 180	Totaal van a	Totaal van c

	grootte		
Drie		$3 \times a =$	$3 \times c =$
Vier		$4 \times a =$	$4 \times c =$
Vyf		$5 \times a =$	$5 \times c =$
Ses		$6 \times a =$	$6 \times c =$
Sewe		$7 \times a =$	$7 \times c =$
Twaalf		$12 \times a =$	$12 \times c =$

- Die eienskappe in die tabel is baie handig wanneer daar besluit moet word hoe om ‘n vloer te teël met reëlmatige veelhoeke sodat hulle nie oorvleuel of gate laat nie. Party veelhoeke sal met ander gekombineer kan word, ander sal alleen werk.
- Ontwerp en teken jou eie herhalende teëlpatroon deur slegs reëlmatige veelhoeke te gebruik, en kleur dit so in dat die patroon duidelik is.

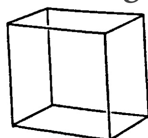
C. **Driedimensionele geslote figure.**

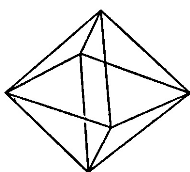
- As hierdie figure se sye uit veelhoeke bestaan, noem ons hulle *polihedra* of *veelvlakke*. ‘n Reëlmatige polihedron (veelvlak) se kante is kongruente reëlmatige poligone, met binnehoeke dieselfde vorm en grootte.
- Anders as die veelhoeke, bestaan daar net vyf reëlmatige veelvlakke. Hulle is al bekend sedert die dae van Plato en die Griekse wiskundiges; daarom staan hulle bekend as die vyf

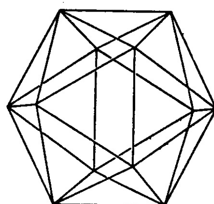
Platoniese ruimtefigure.

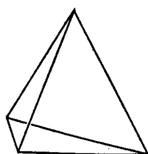
D. **Projek**

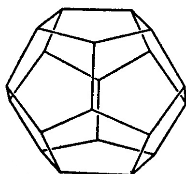
Vors die vyf Platoniese ruimtefigure na om hulle name en eienskappe op te spoor, asook ander interessante feite en verhale oor hulle. Maak ‘n aantreklike plakkaat of modelle van die figure wat die feite van elk aantoon. Hieronder is diagramme van die figure.











Assessering

LU 3
Ruimte en Vorm (Meetkunde)Die leerder is in staat om eienskappe van en verwantskappe tussen

tweedimensionele vorms en driedimensionele voorwerpe in 'n verskeidenheid oriëntasies en posisies te beskryf en voor te stel.

Ons weet dit as die leerder:

3.1 meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe in natuurlike en kulturele vorms en meetkundige agtergrond herken, visualiseer en benoem, insluitend:

3.1.1 reëlmatige en onreëlmatige veelhoeke en veelvlakke;

3.1.2 sfere;

3.1.3 silinders;

3.2 die onderlinge verwantskappe van meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe se eienskappe met bewyse in kontekste, insluitend dié wat gebruik kan word om 'n bewustheid van sosiale, kulturele en omgewingsake te bevorder beskryf, insluitend:3.2.1 kongruensie en reguitlynmeetkunde;

3.3 die meetkunde van reguitlyne en driehoeke gebruik om probleme op te los en verwantskappe in meetkundige figure te bewys;

3.4 meetkundige figure teken en/of konstrueer en modelle maak van driedimensionele voorwerpe om die eienskappe daarvan en van modelsituasies in die omgewing te ondersoek en vergelyk;

3.5 transformasies, kongruensie en gelykvormigheid gebruik om die eienskappe van meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe te ondersoek (alleen en/of as 'n lid van 'n span of groep), insluitend toetse vir die gelykvormigheid en kongruensie van driehoeke.

Memorandum

Bespreking

- Ingesluit by hierdie gids is daar twee bladsye figure vir die konstruksie van eenvoudige regte prismas. Dupliseer genoeg vir die leerders om ten minste twee elk van die figure te maak. Probeer om hiervoor ligte karton of swaar papier te gebruik. Leerders kan gevra word om dele (soos onder-en bokant) in te kleur om die begrip van die moeilike formules duideliker te maak.

- In die algemeen is die twee formules vir regte prismas:
- Totale Buite Oppervlakte = tweemaal die basis–area + prisma–hoogte × basis–omtrek
- Volume = basis – area × prisma – hoogte
- Die toepaslike eenhede (tot die mag 2 of 3) vir elke formule moet altyd vereis word.
- Daar is nog ‘n moontlike probleem omdat die woord *hoogte* gebruik word by die berekening van oppervlaktes van driehoeke asook by die mate van ‘n prisma. Gebruik gerus *h* by die driehoek, en *H* by die prisma.
- As leerders verwar word deur die komponente van die formules, is die metode waar die stappe opgebreek word, van veel hulp. Natuurlik sal

die bedrewe leerder direk reg in die formule kan instel. Dis ‘n effektiese gebruik en kan gerus aangemoedig word.

Oefening: Oplossings:

Reghoekige prisma: *TBO* = 412 cm2 Vol = 480 cm3

Driehoekige prisma: *TBO* = 307,71 cm2 Vol = 360 cm3

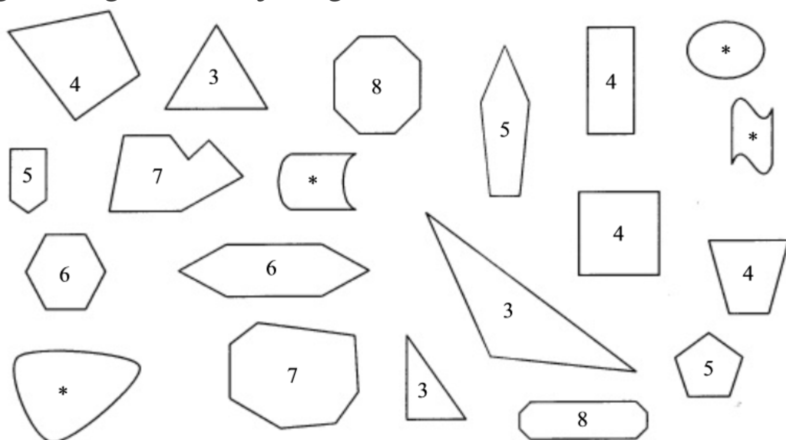
Silinder: *TBO* = 402,12 cm2 Vol = 603,19 cm3

Ouma se Konfyt: Kastrol: Vol = 8 595,40 cm2

11 Vierkantige bottels: Vol = 8 096 cm2

11 Reghoekige bottels: Vol =8 633,63 cm2

As ouma al die konfyt wil inkry moet sy die reghoekige botteltjies gebruik!



3 = driehoek; 4 = vierhoek; 5 = vyfhoek; 6 = seshoek; 7 = sewehoek; 8 = agthoek; * = nie veelhoek

Aantal sye	a = binnehoekgrootte	b = 360°	$c = b -$ 180°	Totaal van a	Totaal van c
Drie	60°	300°	120°	$3 \times a$ = 180°	$3 \times c$ = 360°
Vier	90°	270°	90°	$4 \times a$ = 360°	$4 \times c$ = 360°
Vyf	108°	252°	72°	$5 \times a$ = 540°	$5 \times c$ = 360°
Ses	120°	240°	60°	$6 \times a$ = 720°	$6 \times c$ = 360°
Sewe	308,57°	51,43°	–128,57°	$7 \times a$ = 2160°	$7 \times c$ = 360°
Twaalf	330°	30°	–150°	$12 \times a$ = 3960°	$12 \times c$ = –360°

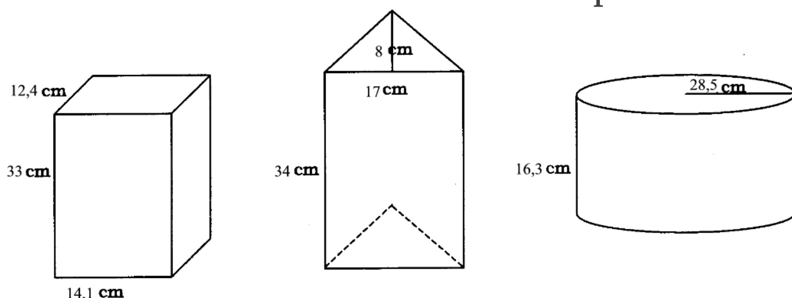
Die

TOETS 1

1. Verduidelik hoe om ‘n regte prisma te herken.

2. Verduidelik hoe om die basis van ‘n regte prisma te bepaal.

3. Bereken die totale buiteoppervlakte en volume van elk van die volgende drie prismas. Gee jou antwoord akkuraat tot twee desimale plekke.



Memorandum

1. Belangrike punte in verduideliking: driedimensioneel; bokant en onderkant kongruente plat- vlakke; sye reghoekig tot basis.

2. Enige redelike verduideliking, bv. as die gekose basis onder is, pas dit die beskrywing van ‘n regte prisma.

3. Reghoekige regte prisma: *TBO* = 1 939,68 cm2
Volume = 5 769,72 cm3

Driehoekige regte prisma: *TBO* = 1 507,74 mm2
Volume = 2 312 mm3

Silinder: *TBO* = 8 022,37 m2 Volume = 41 593,67 m3

WISKUNDE

Graad 9

ALGEBRA EN MEETKUNDE

Module 9

KONGRUENSIE

- Kongruensie beteken dat twee figure in alle opsigte identies is. Dit beteken dus dat al die sye van die een figuur gelyk is aan al die sye

van die ander figuur. Dit beteken ook dat al die hoeke van die een figuur gelyk is aan al die hoeke van die ander figuur. As die figure uitgeknip word, sal al die kongruente figure dus presies op mekaar pas.

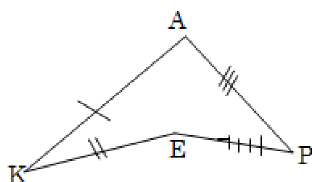
AKTIWITEIT 1

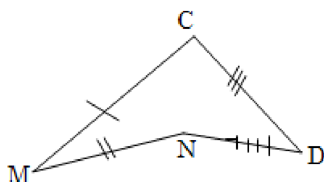
Om te verstaan wat die begrip kongruensie in die algemeen beteken

[LU 3.2.1]

Kyk na die figure op die bladsy met blokkies (A-1) en besluit watter figure kongruent is. Gee dan elke paar kongruente figure deur die letters in die volgorde van sye en hoeke wat gelyk is, te gee. Die simbool vir kongruensie is □

Byvoorbeeld:





Vierhoek APEK □ Vierhoek CDNM

- ‘n Driehoek het **ses** elemente; naamlik drie hoeke en drie sye. Net **drie** van hierdie elemente is nodig om ‘n driehoek te konstrueer:

- Kombinasies van die drie elemente is:

- 3 sye (sss)
- 2 sye en die hoek tussen hulle (s□s)
- 2 hoeke en ‘n sy (□□s)
- 2 sye en die hoek nie tussen hulle nie (ss□)
- 3 hoeke (□□□)
- ‘n 90° - hoek, ‘n reghoeksy en die skuinssy (90°ss)

AKTIWITEIT 2

Om prakties uit te vind wat die voorwaardes van kongruensie van driehoeke is.

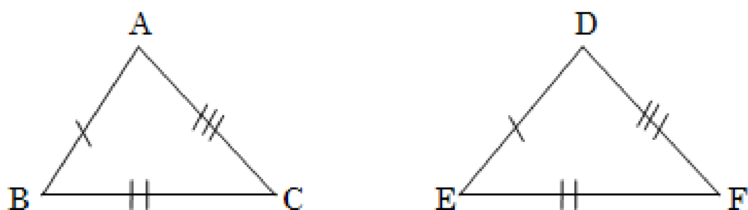
- Jy word vier bladsye met akkuraat gekonstrueerde driehoeke gegee.

1.1 Bestudeer **bladsy A-2** van die akkuraat gekonstrueerde driehoeke. Kyk na al die driehoeke wat gekonstrueer is deurdat drie sye gebruik is en gee al die pare driehoeke wat kongruent is. **(sss)**. Onthou dat, soos in aktiwiteit 1, die driehoeke gegee moet word in die volgorde van die sye wat gelyk is aan mekaar.

1.2 Sal twee driehoeke waarvan die sye van die een driehoek gelyk is aan die sye van die ander driehoek **altyd** kongruent wees aan mekaar?

1.3 As jy slegs die inligting, soos in die sketse hieronder, kry, sal jy met sekerheid kan sê dat die

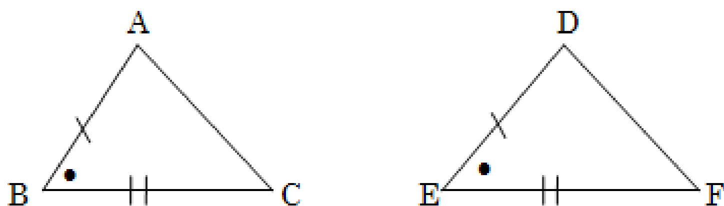
twee driehoeke **altyd** kongruent is? (Onthou geen werklike lengtes word gegee nie).



2.1 Bestudeer weer **bladsy A-2** van die akkuraat gekonstrueerde driehoeke. Kyk nou na al die driehoeke wat gekonstrueer is deurdat twee sye en ‘n ingeslote hoek gebruik is om hulle te konstrueer, **(s□s)**, en gee al die pare driehoeke wat kongruent is. Onthou weer dat die driehoeke gegee moet word in volgorde van die sy, hoek en sy wat gelyk is.

2.2 Sal twee driehoeke waarvan die twee sye en die hoek tussen die twee gegewe sye, gelyk is, altyd kongruent wees?

2.3 As jy slegs die inligting, soos in die sketse hieronder, kry, sal jy met sekerheid kan sê dat die twee driehoeke **altyd** kongruent is? (Geen werklike sylengtes en hoekgroottes word gegee nie).

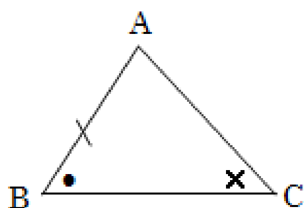


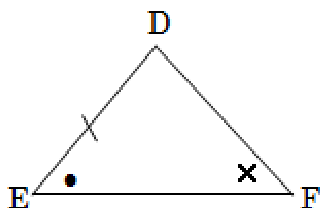
3.1 **Op bladsy A-3** van die akkuraat gekonstrueerde driehoeke word twee hoeke en ‘n sy gebruik **(□□s)** om die driehoeke te konstrueer. Bestudeer hierdie driehoeke en skryf die pare driehoeke neer wat kongruent is. Onthou weer om die driehoeke te skryf in volgorde van die elemente wat gelyk is.

3.2 In ΔDOM en ΔLOC is DM = OC, □D = □O en □M = □L, maar tóg is die twee driehoeke nie kongruent nie. Hoekom is dit so? Gee ‘n algemene reël deur die volgende sin te voltooi:

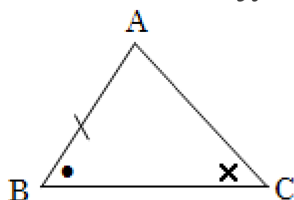
Twee driehoeke is kongruent as hoek, hoek, sy = hoek, hoek, en die .... sy.

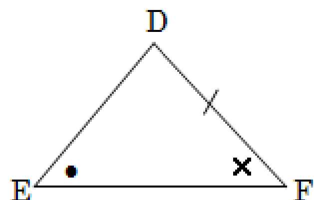
3.3 As jy slegs die inligting, soos in die sketse hieronder, kry, sal jy met sekerheid kan sê dat die twee driehoeke **altyd** kongruent is?





3.4 Sal die volgende driehoeke **altyd** kongruent wees? Hoekom sê jy so?





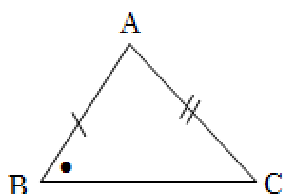
4.1 **Kyk na bladsy A-4** van die akkuraat gekonstrueerde driehoeke. Al die driehoeke op bladsy A-4 is gekonstrueer deurdat die twee sye en die hoek nie tussen die gegewe sye **(ss□)** gebruik is om die driehoeke te konstrueer nie. Soek al die pare driehoeke wat kongruent is en skryf hulle neer in volgorde van die elemente wat gelyk is.

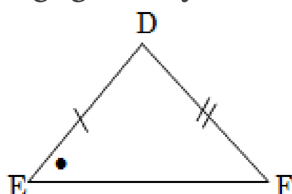
4.2 Daar is twee driehoeke wat, hoewel die twee sye en die hoek gelyk is, nie kongruent is nie. Noem hulle.

4.3.1 Dink jy dat, as twee sye en die nie-ingeslote hoek gegee word, die driehoeke wat só gekonstrueer word **altyd** kongruent sal wees?

4.3.2 Aan watter vereiste moet die lengtes van die twee sye wat gebruik word om die driehoeke te konstrueer, voldoen vir die driehoeke om kongruent te wees?

4.4.4 As jy slegs die inligting, soos in die sketse hieronder, kry, sal jy met sekerheid kan sê dat die twee driehoeke **altyd** kongruent is? (Onthou, jy weet nie nou hoe lank die twee gegewe sye is nie).

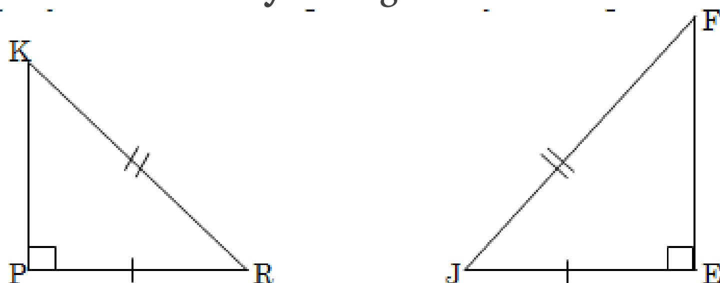




4.5.1 Daar is vier driehoeke op **bladsy A-4** waar die

gegewe hoek 90° is. As die nie-ingeslote hoek 90° is, dink jy dat die twee driehoeke altyd kongruent sal wees? **(s s 90°)**

4.5.2 As jy slegs die inligting, soos in die sketse hieronder, kry, sal jy met sekerheid kan sê dat die twee driehoeke **altyd** kongruent is?



5. Op **bladsy A-5** kry jy driehoeke waarvan die drie hoeke van die een driehoek gelyk is aan die drie hoeke van die ander driehoek. **(□□□)**

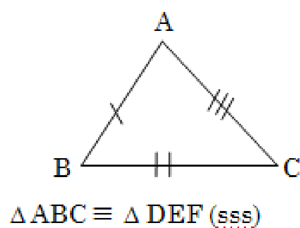
5.1 Is driehoeke wat só gekonstrueer word**, noodwendigaltyd** kongruent?

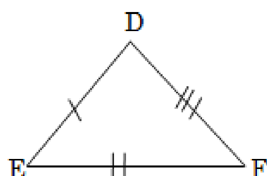
5.2 As jy slegs die inligting, soos in die sketse hieronder, kry, sal jy met sekerheid kan sê dat die twee driehoeke **altyd** kongruent is?



6. Gee nou self die kombinasies van sye en hoeke vir driehoeke om kongruent te wees. Illustreer elke kombinasie soos die voorbeeld hieronder:

1.





2.

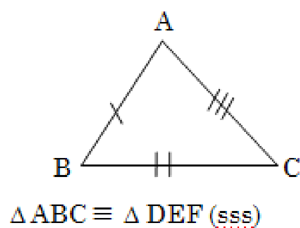
3.

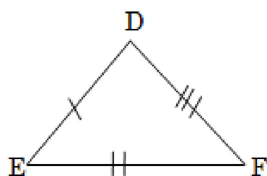
4.

Huiswerkopdrag

1. Sê of die volgende pare driehoek kongruent is of nie. Doen elke nommer soos die voorbeeld hieronder.

Voorbeeld:



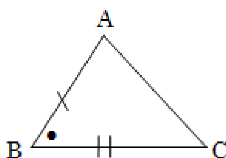


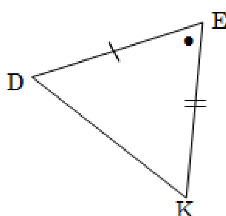
Δ ABC □ Δ DEF (sss)□□ A = □ D; □B = □E en □C = □F

L.W. As die driehoeke nie noodwendig kongruent is nie, skryf dan ΔABC □ ΔDEF en skryf dan neer hoekom jy so sê.

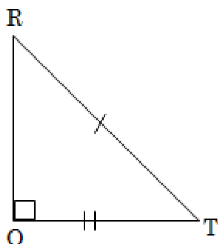
- Die driehoeke is nie volgens skaal geteken nie. Jy moet slegs die inligting wat in elk van die figure gegee is in ag neem.

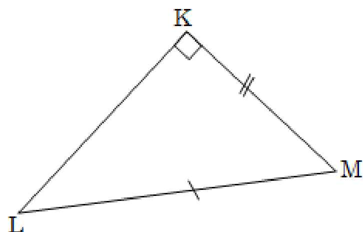
1.1.



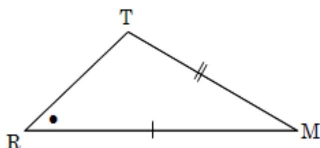


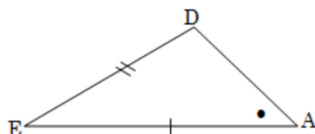
1.2.



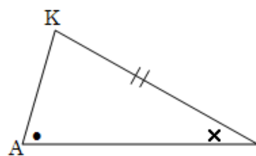


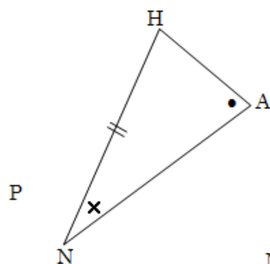
1.3.



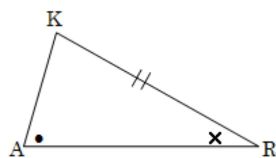


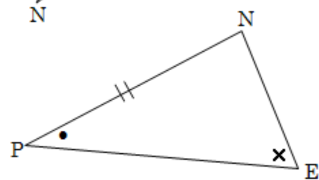
1.4.



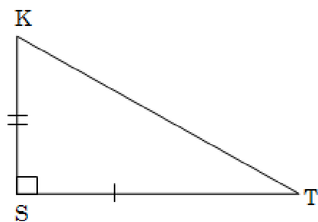


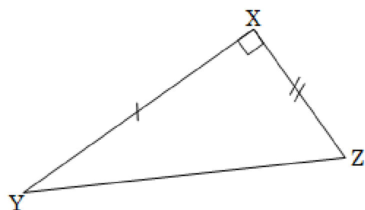
1.5.



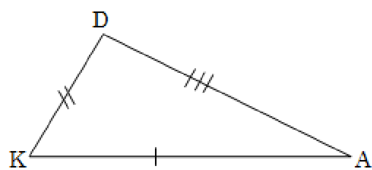


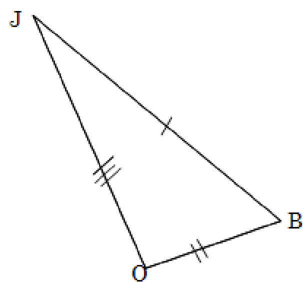
1.6.



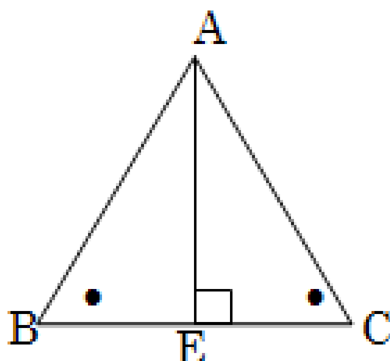


1.7.

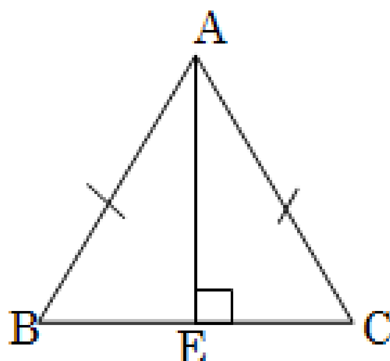




1.8

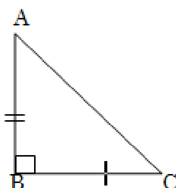


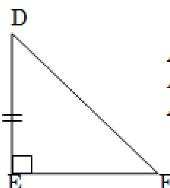
1.9



2. In elk van die volgende pare driehoeke is twee pare dele gelyk gemaak. Skryf in elke geval nog 'n paar dele neer wat gelyk moet wees om kongruensie te verseker. Gee die kongruensietoets wat jy gebruik en gee ook al die moontlikhede sonder om een kongruensietoets te herhaal.

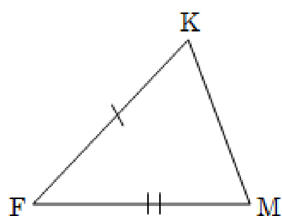
Voorbeeld:

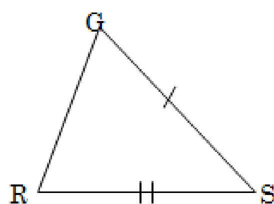




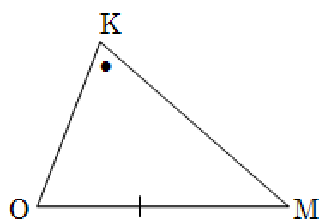
As BE = EF (s∠s)
As AC = DF (90°s s)
As ∠ C = ∠ f (∠∠s)

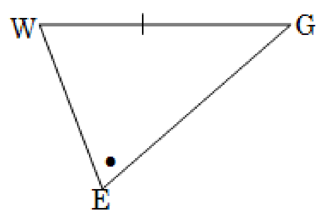
2.1



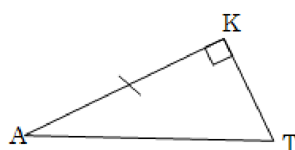


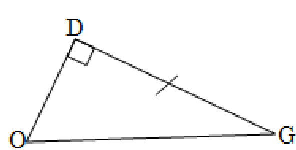
2.2



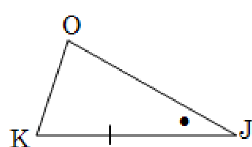


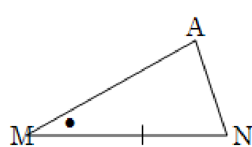
2.3





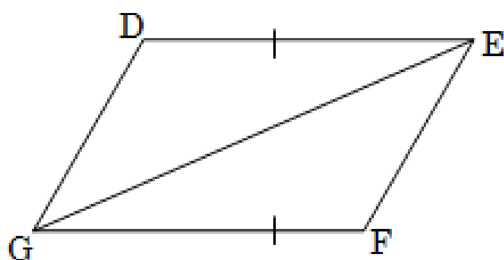
2.4



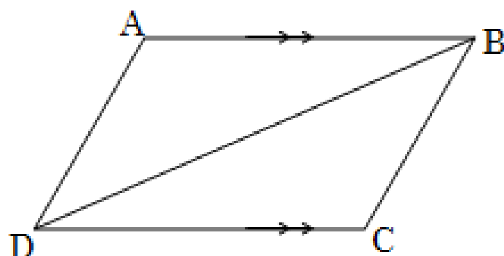


Assessering

2.5



2.6



Assessering

LU 3
Ruimte en Vorm (Meetkunde)Die leerder is in staat om eienskappe van en verwantskappe tussen tweedimensionele vorms en driedimensionele voorwerpe in 'n verskeidenheid oriëntasies en posisies te beskryf en voor te stel.

Ons weet dit as die leerder:

3.1 meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe in natuurlike en kulturele vorms en meetkundige agtergrond herken, visualiseer en benoem, insluitend:

3.1.1 reëlmatige en onreëlmatige veelhoeke en veelvlakke;

3.1.2 sfere;

3.1.3 silinders;

3.2 die onderlinge verwantskappe van meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe se eienskappe met bewyse in kontekste, insluitend dié wat gebruik kan word om ‘n bewustheid van sosiale, kulturele en omgewingsake te bevorder beskryf, insluitend:3.2.1 kongruensie en reguitlynmeetkunde;

WISKUNDE

Graad 9

ALGEBRA EN MEETKUNDE

Module 10

GELYKVORMIGHEID

AKTIWITEIT 1:

Om prakties die voorwaardes van gelykvormigheid

te ondersoek

1. Die vyfhoeke ABDEF en LCMRK word gegee (A-6). LCMRK is ‘n vergroting van ABDEF. Wat is die skaalfaktor waarmee ABDEF vergroot is om LCMRK te gee?

2. Skryf die verhoudings tussen die ooreenstemmende pare sye van ABDEF en LCMRK neer.

3. Skryf die verwantskap tussen die ooreenstemmende pare hoeke van die twee figure neer.

4. Hierdie twee figure is nie kongruent nie. Wat noem ons hulle?

5. Noem soveel moontlik voorbeelde in die alledaagse lewe van hierdie verskynsel.

Gelykvormige figure.

Die vyfhoeke in die aktiwiteit hierbo is gelykvormig. Hulle het dieselfde vorm, maar is nie ewe groot nie.

Hulle ooreenstemmende hoeke het dieselfde grootte.

Hulle ooreenstemmende sye is in dieselfde verhouding.

Dus is $LKAF = KRFE = MRDE = CMBD = CLBA = 31$

Hierdie konstante verhouding is ook die skaalfaktor van die vergroting.

Ons sê dat ABDEF □□□ LCMRK. Let daarop dat die volgorde van die letters in dieselfde volgorde van die hoeke wat gelyk is en die sye wat in verhouding is, geskryf word. (Die simbool vir gelykvormigheid is □□□).

Huiswerkopdrag

1. Meet die lengtes van die sye en die groottes van die hoeke in die volgende figure (A-7) en besluit of hulle gelykvormig is of nie. As die twee figure nie gelykvormig is nie, gee die rede hoekom hulle nie gelykvormig is nie.

2. As twee vierhoeke se **ooreenstemmende hoeke gelyk** is, is hulle **noodwendig** ook **gelykvormig**?

3. As twee vierhoeke se **sye in dieselfde verhouding** is, is hulle **noodwendig** ook **gelykvormig**?

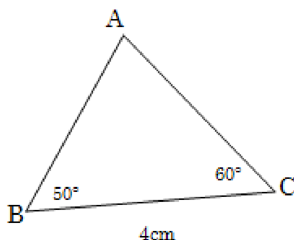
In bostaande huiswerkopdrag het jy gesien dat, vir vierhoeke om gelykvormig te wees, aan albei voorwaardes van gelykvormigheid voldoen moet word, met ander woorde, die ooreenstemmende hoeke moet gelyk wees en die ooreenstemmende sye moet in dieselfde verhouding wees. Geld dieselfde ook vir driehoeke?

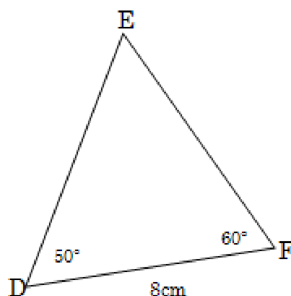
AKTIWITEIT 2:

Om prakties die voorwaardes van gelykvormigheid by driehoeke te ondersoek

[LU 3.5]

1.1





Konstrueer ΔABC en ΔDEF. Bereken die grootte van A en E.

1.2 Is die ooreenstemmende hoeke van die twee driehoeke gelyk?

1.3 Voltooi die volgende:

ABED = ...

BCDF = ...

ACEF = ...

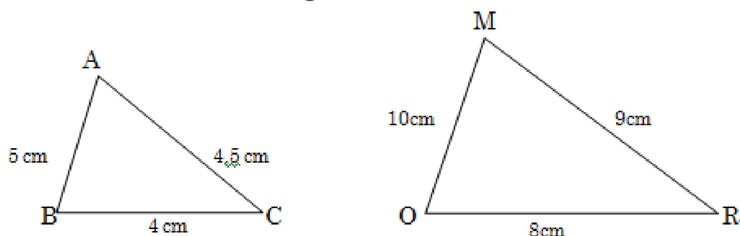
1.4 Is die ooreenstemmende sye van die twee

driehoeke in dieselfde verhouding?

1.5 Is die twee driehoeke gelykvormig?

1.6 Voltooi die volgende: As twee driehoeke se ooreenstemmende hoeke gelyk is, is hulle ooreenstemmende sye noodwendig altyd .... Dit beteken dus dat, as driehoeke se ooreenstemmende hoeke gelyk is, is die driehoeke ....

2.1 Konstrueer die volgende twee driehoeke:



2.2 Is die sye van die twee driehoeke in dieselfde verhouding?

2.3 Meet al die hoeke van ΔABC en ΔMOR. Wat vind jy?

2.4 Is die ΔABC □□□ ΔMOR?

2.5 Voltooi die volgende: As twee driehoeke se ooreenstemmende sye in dieselfde verhouding is, is hulle ooreenstemmende .... gelyk. Dit beteken dus dat, as driehoeke se

ooreenstemmende sye in dieselfde verhouding is, is die driehoeke ....

Ons sien dus dat by driehoeke net een van die voorwaardes vir gelykvormigheid teenwoordig hoef te wees.

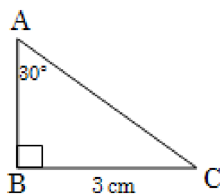
Dit beteken as **drie hoeke** van die **een driehoek gelyk is** aan **drie hoeke** van die ander driehoek, dan is die sye in dieselfde verhouding en dus is die twee driehoeke gelykvormig.

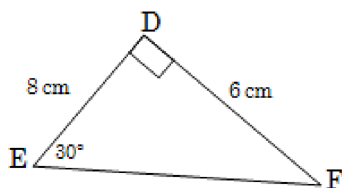
Dit beteken ook dat, as die **ooreenkomstige sye** van die twee driehoeke in **dieselfde verhouding** is, dan is die ooreenkomstige hoeke van die twee driehoeke gelyk en dus is die twee driehoeke gelykvormig.

Huiswerkopdrag

1. Die volgende pare driehoeke word gegee. Sê of hulle gelykvormig is of nie en gee redes vir jou antwoord. As die paar driehoeke gelykvormig is, bereken die groottes van die sye en die hoeke wat nie in die figure gegee is nie.

Voorbeeld:



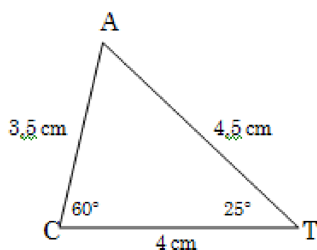


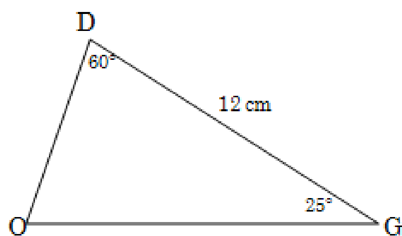
□C = □F = 60°Δ ABC □□□ ΔEDF (□□□)

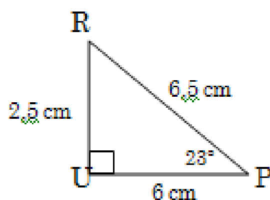
AB = 4 cmAC = 5 cm (pyth)EF = 10 cm

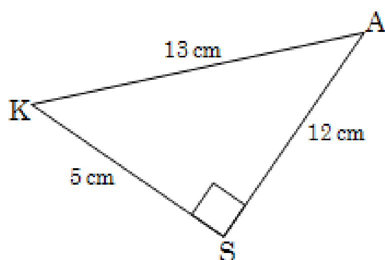
1.1.

1.2

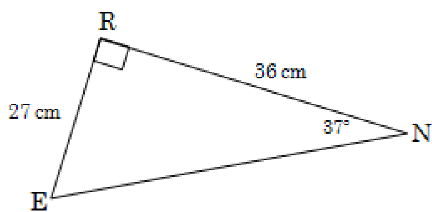


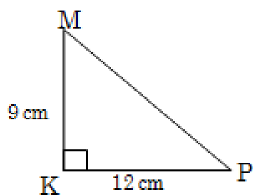




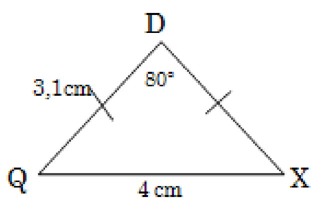


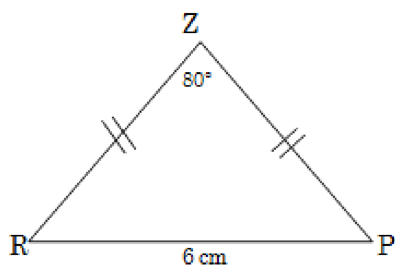
1.3



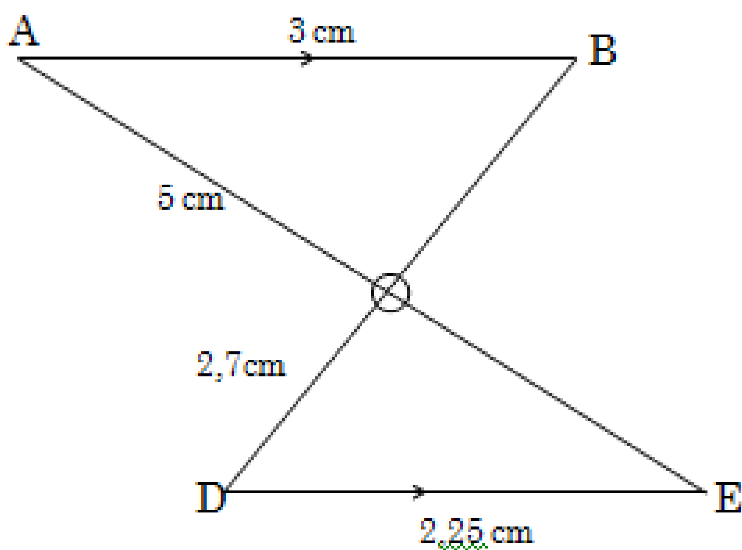


1.4





2.



2.1 Voltooi die volgende:

In ΔAOB en ΔDOE:

Rede

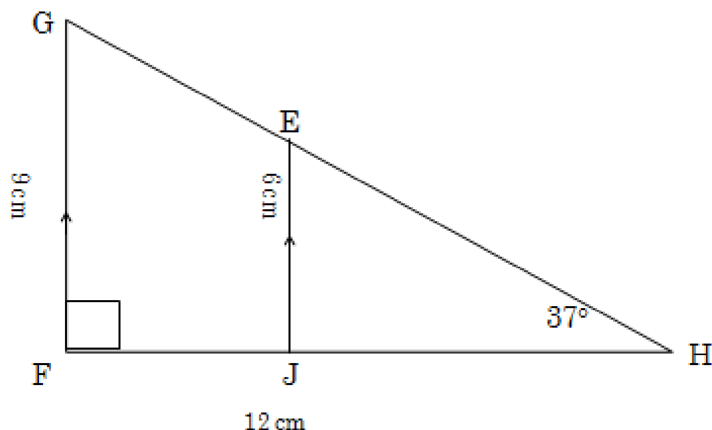
□.......... = □..........
(..)

□.......... = □..........
(..)

□Δ.............. □□□.............. (□□□)

2.2 Bereken nou die lengtes van die ontbrekende sye.

3. In die figuur is FH = 12 cm.



3.1 Voltooi die volgende:

In Δ.......... en Δ..........

□.......... = □..........
(...)

□.......... = □..........
(...)

□Δ............. □□□............. (□□□)

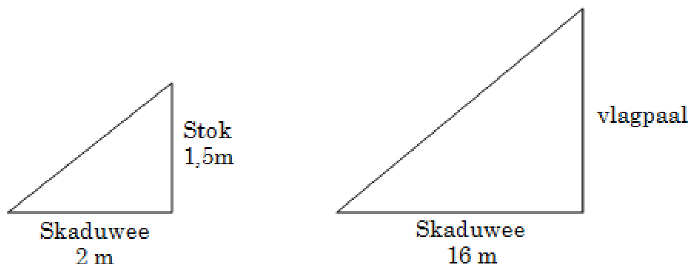
3.2 Bereken nou die lengtes van die volgende:

3.2.1 HE

3.2.2 EG

3.2.3 FJ

4. Die hoogte van ‘n hoë, vertikale voorwerp word bepaal deurdat die skaduwee van ‘n stok van bekende lengte gemeet word en die skaduwee van die voorwerp gemeet word. Die volgende figure gee die metings wat gemaak is.



Bepaal die lengte van die vlagpaal

ASSESSERINGSTAAK:

Om van gelykvormigheid gebruik te maak om die hoogte van ‘n hoë voorwerp te meet:

Werk in pare saam.

1. Die volgende word benodig:

‘n Maatband van tenminste 5 m lank

‘n Spieël

‘n Liniaal

‘n Veltpen

2. Gaan soos volg te werk:

Soek twee hoë, vertikale voorwerpe op die skoolgrond soos byvoorbeeld ‘n netbalpaal, ‘n lamppaal, rugbypale of ‘n vlagpaal. Soek veral voorwerpe waarvan die hoogte normaalweg moeilik fisies gemeet kan word.

Trek twee dun lyne met die veltpen op die spieël sodat die lyne mekaar loodreg kruis.

Plaas nou die spieël op gelyk grond ‘n ent vanaf die hoë voorwerp.

Een persoon staan nou terug en kyk in die spieël en verskuif sy / haar posisie totdat die top van die voorwerp presies op die snypunt van die twee lyne op die spieël val.

3. Meet die volgende:

die hoogte van die persoon wat in die spieël gekyk het tot by sy/ haar oë

die afstand tussen die persoon wat in die spieël gekyk het en die snypunt van die lyne in die spieël

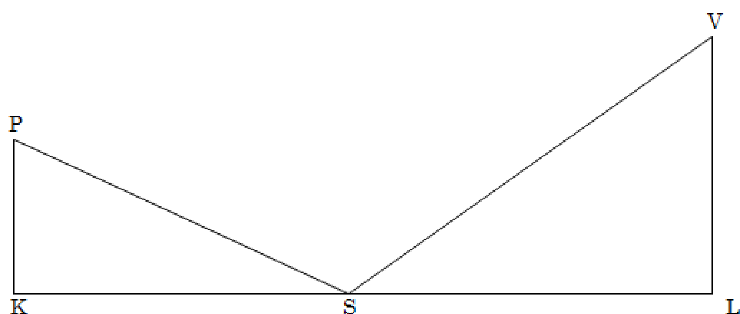
die afstand tussen die voorwerp en die snypunt van die lyne in die spieël.

Resultate:

1. Teken die tabel oor op ‘n foliobladsy en voltooi dit:

Die voorwerp waarvan die hoogte gemeet word	Ooghoogte van die persoon	Afstand tussen die persoon en die snypunt van die lyne op die spieël	Afstand vanaf die spieël tot by die voorwerp	Berekende hoogte van die voorwerp korrek tot die naaste cm

2.



In die skets is PK die ooghoogte van die persoon, S is die posisie van die spieël en VL is die voorwerp

waarvan die hoogte gemeet word. Verduidelik hoekom ΔPKS □□□ ΔVLS is.

3. In hierdie taak kan die afmetings onakkuraat wees. Verduidelik watter foute gemaak kan word wat die akkuraatheid van die bepaling van die hoogte van die voorwerp kan beïnvloed.

Assessering

LU 3
Ruimte en Vorm (Meetkunde)Die leerder is in staat om eienskappe van en verwantskappe tussen tweedimensionele vorms en driedimensionele voorwerpe in ‘n verskeidenheid oriëntasies en posisies te beskryf en voor te stel.
Ons weet dit as die leerder:
3.1 meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe in natuurlike en kulturele vorms en meetkundige agtergrond herken, visualiseer en benoem, insluitend:
3.1.1 reëlmatige en onreëlmatige veelhoeke en veelvlakke;
3.1.2 sfere;
3.1.3 silinders;

3.2 die onderlinge verwantskappe van meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe se eienskappe met bewyse in kontekste, insluitend dié wat gebruik kan word om ‘n bewustheid van sosiale, kulturele en omgewingsake te bevorder beskryf, insluitend:3.2.1 kongruensie en reguitlynmeetkunde;

3.3 die meetkunde van reguitlyne en driehoeke gebruik om probleme op te los en verwantskappe in meetkundige figure te bewys;

3.4 meetkundige figure teken en/of konstrueer en modelle maak van driedimensionele voorwerpe om die eienskappe daarvan en van modelsituasies in die omgewing te ondersoek en vergelyk;

3.5 transformasies, kongruensie en gelykvormigheid gebruik om die eienskappe van meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe te ondersoek (alleen en/of as ‘n lid van ‘n span of groep), insluitend toetse vir die gelykvormigheid en kongruensie van driehoeke.

Werkvelle

WISKUNDE

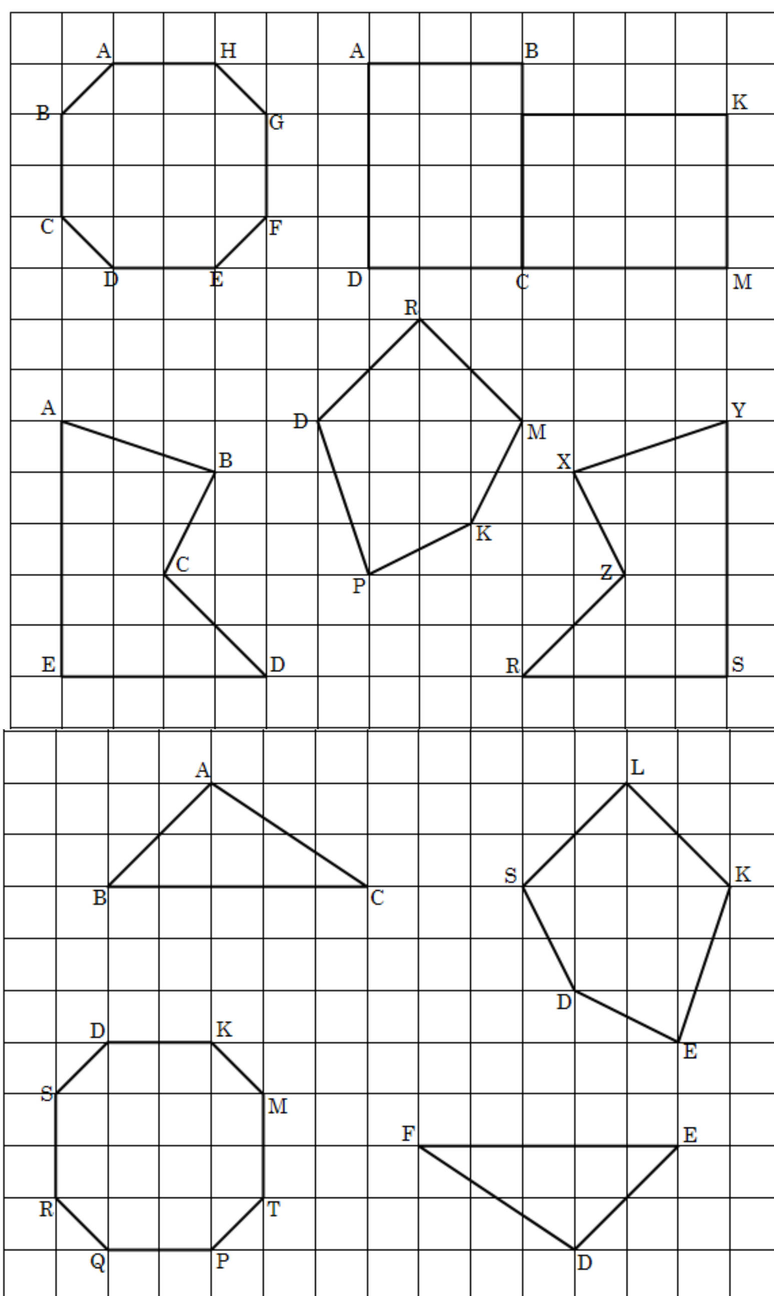
Graad 9

ALGEBRA EN MEETKUNDE

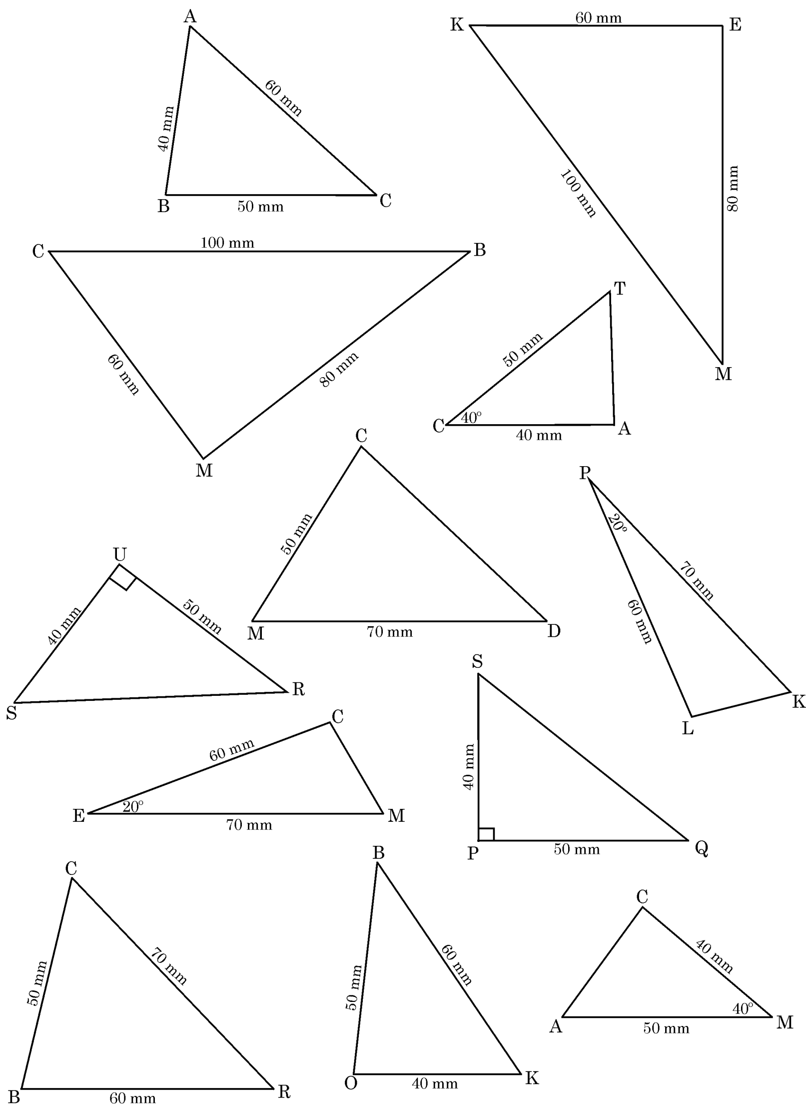
Module 11

WERKVELLE BY MODULES 9 EN 10

A -1

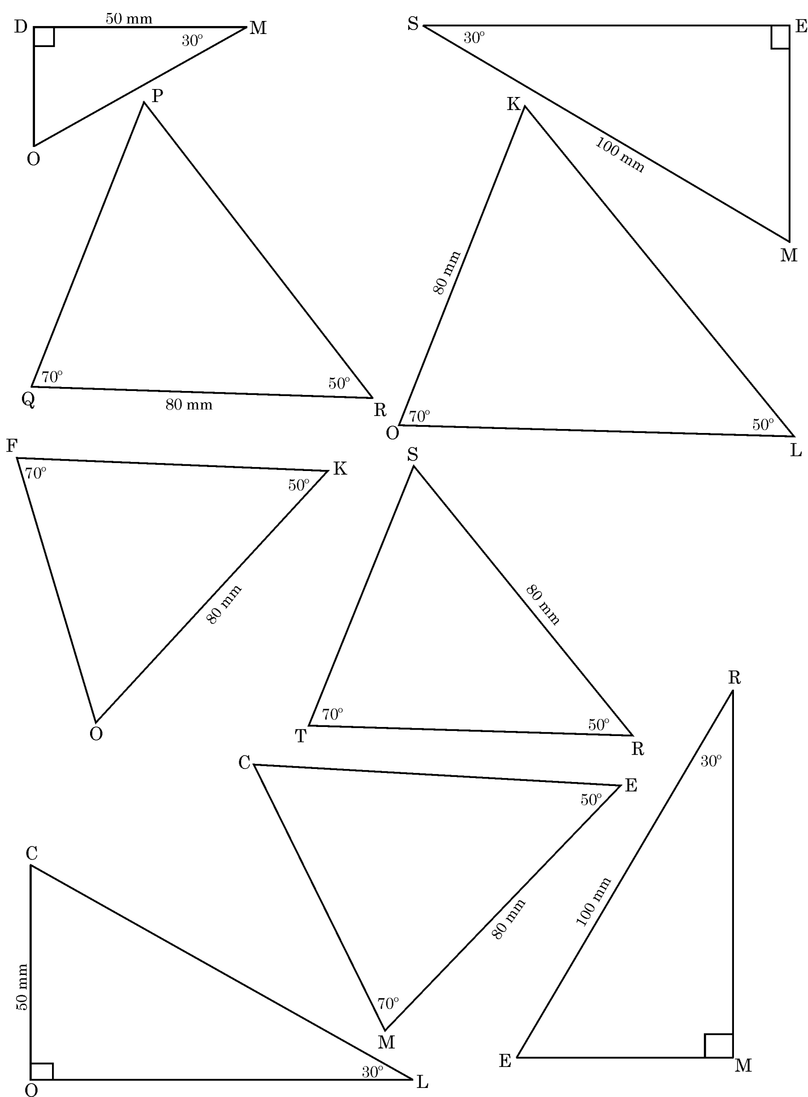


A-2

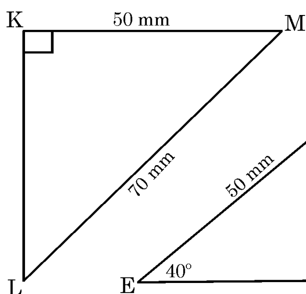


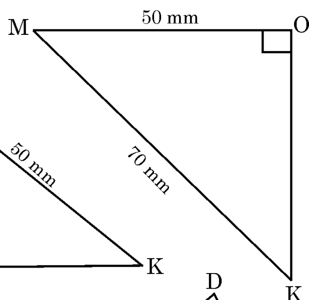
A
B
C
40 mm
60 mm
50 mm
K
E
M
60 mm
100 mm
80 mm
C
B
M
100 mm
60 mm
80 mm
T
C
A
50 mm
40°
40 mm
C
M
D
50 mm
70 mm
P
L
K
20°
70 mm
60 mm
U
S
R
40 mm
50 mm
S
P
Q
40 mm
50 mm
C
E
M
60 mm
20°
70 mm
C
B
R
50 mm
70 mm
60 mm
B
O
K
50 mm
60 mm
40 mm
C
A
M
40 mm
40°
50 mm

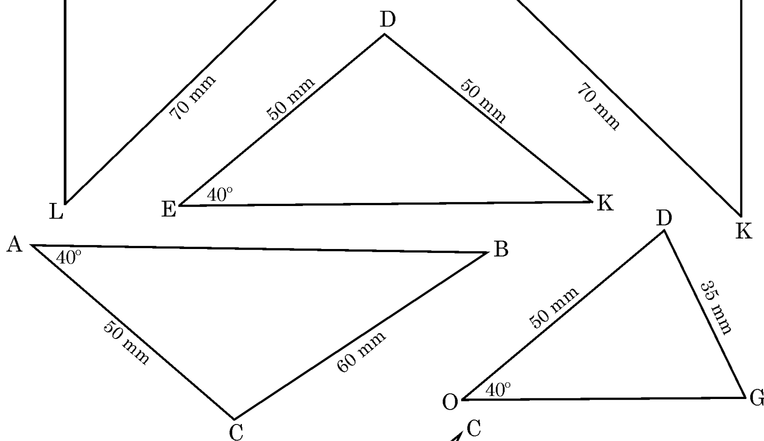
A-3

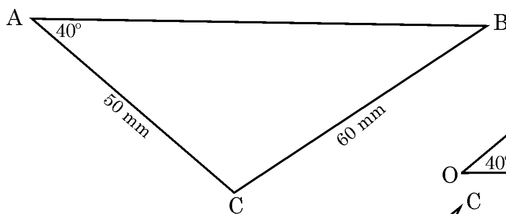

D
50 mm
M
30°
O
S
30°
E
100 mm
M
P
70°
50°
Q
80 mm
R
K
80 mm
70°
50°
O
L
F
70°
K
50°
80 mm
O
S
80 mm
70°
50°
T
R
R
30°
100 mm
E
M
C
E
50°
80 mm
70°
M
C
50 mm
30°
O
L

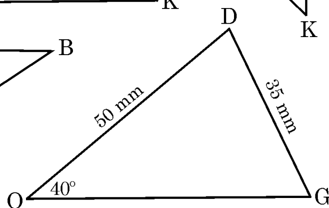
A-4

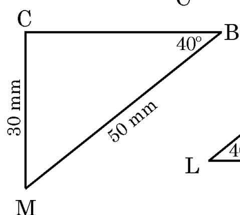

K
50 mm
M
70 mm
L

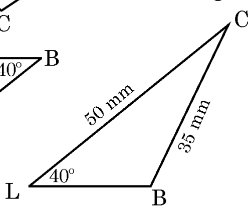

M
50 mm
O
70 mm
K

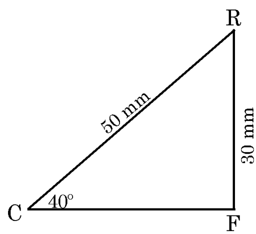

D
50 mm
50 mm
E
40°
K

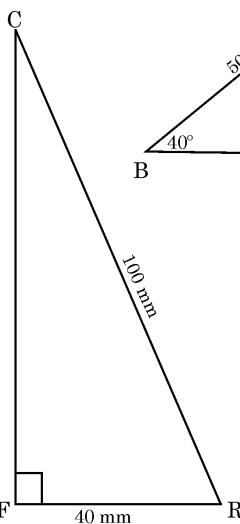

A
40°
B
50 mm
60 mm
C

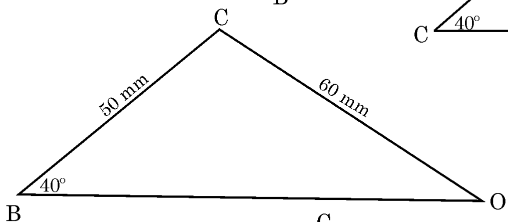

D
50 mm
35 mm
O
40°
G

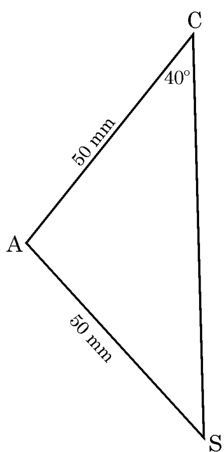

C
B
40°
30 mm
50 mm
M

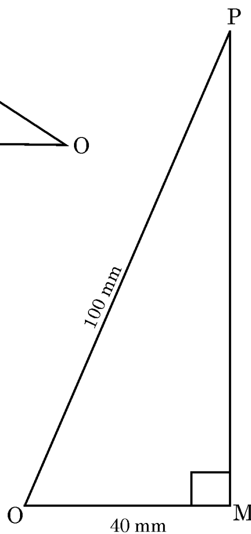

C
50 mm
35 mm
L
40°
B


R
50 mm
30 mm
C
40°
F

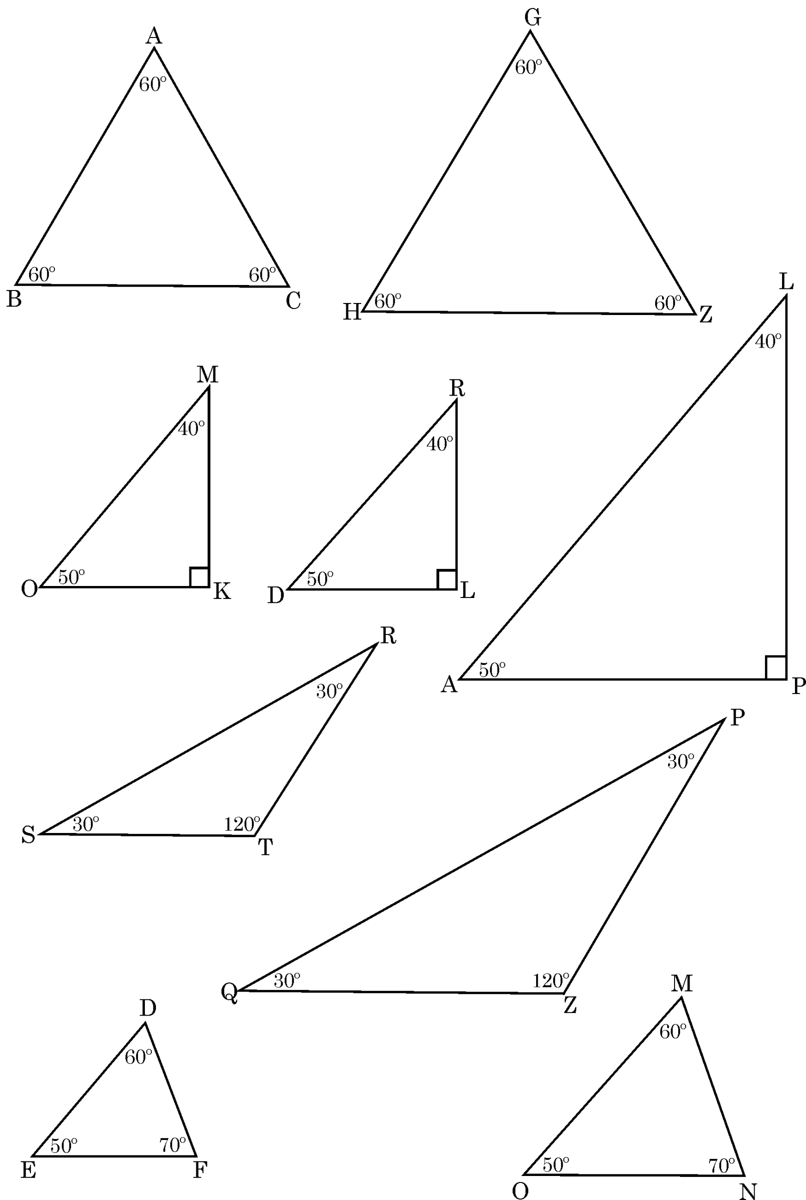

C
100 mm
F
40 mm
R


C
50 mm
60 mm
B
40°
O


C
40°
50 mm
A
50 mm
S

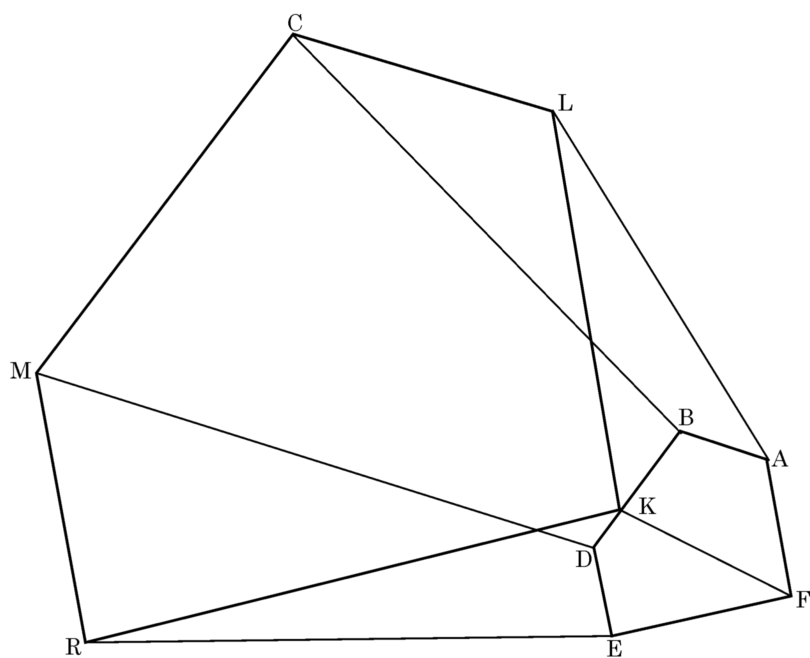

P
100 mm
O
40 mm
M

A-5

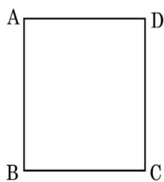
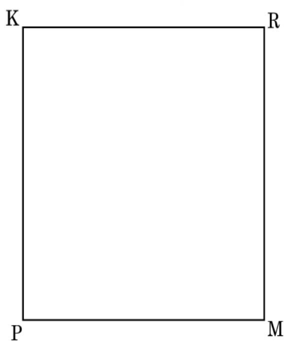
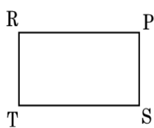
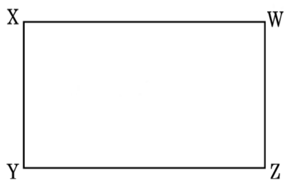
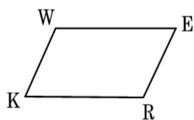
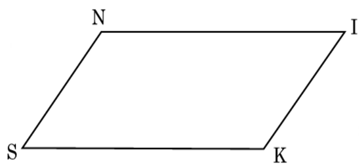
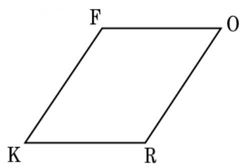
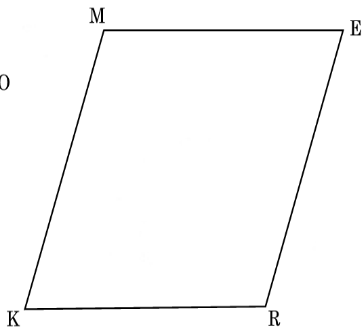
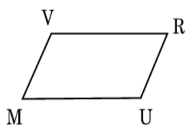
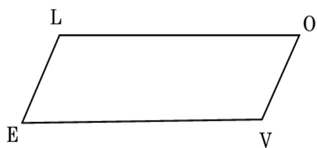


A
60°
B
60°
60°
C
G
60°
H
60°
60°
Z
L
40°
M
40°
O
50°
K
R
40°
D
50°
L
A
50°
P
R
30°
S
30°
120°
T
P
30°
Q
30°
120°
Z
M
60°
O
50°
70°
N
D
60°
E
50°
70°
F

A-6



A-7


A
D
B
C

K
R
P
M

R
P
T
S

X
W
Y
Z

W
E
K
R

N
I
S
K

F
O
K
R

M
E
K
R

V
R
M
U

L
O
E
V

WISKUNDE

Graad 9

GETALPATRONE

GRAFIESE VOORSTELLINGS

VERGELYKINGS

STATISTIEK

WAARSKYNLIKHEIDSLEER

Module 12

GETALPATRONE

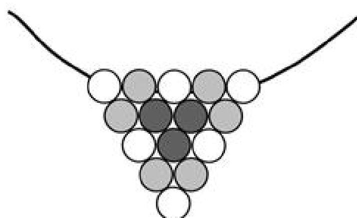
AKTIWITEIT 1

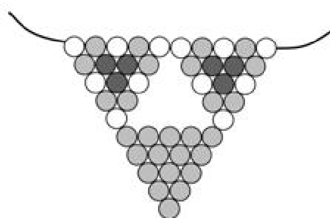
Om ‘n tabel te gebruik om inligting te organiseer

[LU 2.1, 2.2]

Alice maak hangertjies deur driehoek–motiewe op ‘n draadjie te plaas (soos in diagram 1). Elke motief bestaan uit drie swart krale, ses wit krale en ses

gekleurde krale. Dis vir haar belangrik om genoeg krale van elke kleur te koop. Sy wil 50 hangertjies met swart, wit en rooi krale maak; 40 met swart, wit en geel krale; 40 met swart, wit en blou krale en 30 met swart,wit en groen krale.


Diagram 1


Diagram 2

1. Vraag: Bereken hoeveel krale van elke kleur sy moet koop.

Sy maak ook ‘n groter hangertjie (soos in diagram 2) waar sy drie motiewe kombineer. Die twee boonste motiewe is dieselfde ontwerp as in diagram 1, maar die onderste motief bestaan slegs uit 15 gekleurde krale. Van hierdie hangertjies maak sy net die helfte soveel in elke kleur as die eenvoudige hangertjie.

2. Vraag: Hoeveel krale van elke kleur benodig sy vir hierdie hangertjies?

Die groter hangertjies is bo verwagting gewild, dus besluit sy om groter motiewe te ontwerp en om meer motiewe per hangertjie te gebruik. Die volgende twee diagramme toon haar nuwe planne.

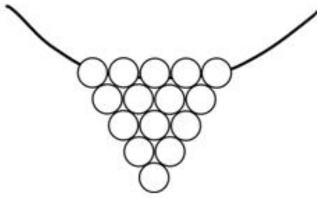


Diagram 3

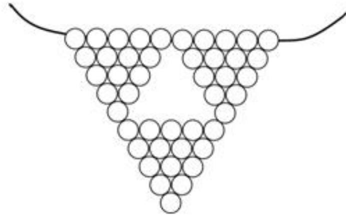


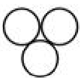
Diagram 4

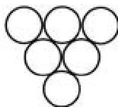
Alice wil vier kleure kombineer in elke motief. Gebruik die diagram om jou eie vier–kleur ontwerp te maak.

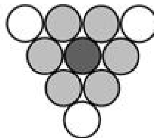
3. Vraag: Herhaal die berekening–oefeninge vir hierdie hangertjies.

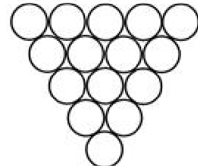
Hierdie driehoek-motiewe kan natuurlik groter en groter gemaak word. Almal is egter nie geskik vir hangertjies nie!

4. Oefening: Hieronder is gelyksydige driehoek–motiewe 1 tot 4. Teken motiewe 6 en 7 wat verder volg.









Die derde motief hierbo het 1 swart, 3 wit en 6 rooi krale. Jy sal hierna moet verwys in probleem 6 verder aan.

5. Data–insameling: Die krale in die motiewe het elk ‘n deursnit van 1cm. Dus is die sylengte van die eerste motief in die gegewe volgorde 2 cm. Voltooi die tabel hieronder deur na die driehoeke hierbo, asook dié wat jy geteken het, te verwys.

Sylengte van driehoek in sentimeter	2	3	4	5	6	7	8	
Aantal krale per driehoek	3	6	10					
Omtrek van driehoek	6	9						

6. Ondersoek: Alice maak haar hangertjies deur driehoekmotiewe te kombineer soos in diagram 2 en 4. As sy die 10–kraalmotief gebruik, het die kleinste hanger een motief (grootte 1) en die volgende hanger het drie motiewe (grootte 2) met ‘n driehoek–vormige spasie in die middel. Dink hoe die volgende groottes hangertjies (3, 4, ens.) gaan lyk

(of teken hulle) en voltooi onderstaande tabel. Probeer om die laaste kolom ook te voltooi!

Hangertjie-grootte	1	2	3	4	5	X
Aantal driehoekmotiewe	6	10				
Aantal driehoekspasies						
Aantal krale per sy van elke driehoekmotief						
Totale aantal krale per hangertjie						
Aantal swart krale						
Totale omtrek van hanger	9					

met 1cm krale

6. Ondersoek: Doen dieselfde vir die volgende tabel as Alice nou die 15–kraalmotief gebruik (sien die heel eerste diagram).

Hangertjie–grootte	1	2	3	4	5	X
Aantal driehoekmotiewe	1	3				
Aantal driehoekspasies	0	1				
Aantal krale per sy van elke driehoekmotief	5	10				
Totale aantal krale per hangertjie	15	45				
Aantal	3	9				

swart krale										
Totale omtrek van hanger met 1cm krale	12	27								

As inligting getabelleer word, is dit baie makliker om die patrone wat die getalle vorm raak te sien. Dis waarom tabelle dikwels gebruik word om inligting te organiseer. Jy sal nog baie tabelle in wiskunde gebruik. Maak ‘n tabel vir enige probleem as jy dink die tabel sal help.

AKTIWITEIT 2

Om verwantskappe tussen veranderlikes te ondersoek

[LU 2.1, 2.6]

Mnr. en mev. Peters wil ‘n woonwa huur vir hulle vakansie. Hulle het by drie firmas navraag gedoen oor die huur van woonwaens. Nou moet hulle besluit watter woonwa om te huur, en hoe lank. Ons

gaan hulle help besluit. Hier volg die woordbeskrywings wat hulle van die firmas ontvang het:

- Away–van: Hulle woonwaens kos R750 per dag.
- Best Caravans vra ‘n R1 200 verhuringsfooi, met ‘n R360 daaglikse heffing.
- Car–a–holiday: Hulle verhuur ‘n woonwa teen R950, met ‘n R540 daaglikse heffing.

1. Rangskik data: Voltooi die volgende tabel vanuit bostaande beskrywings.

Aantal dae:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Away–van:	R750											
Best Caravans:	R1560	R1920										
Car–a–holiday:	R1490	R2030										

2. Kan jy uit die tabel aflei watter opsie die beste sal wees, afhanklik van die duur van die vakansie?

Skryf ‘n kort opsomming van jou gevolgtrekkings.

3. Hier is ‘n vloeidiagram van die Car–a–holiday pryse. Bereken die waardes vir die oop blokkies:

5

x 540

+ 950

540 x 9 + 950

x

540 x + 950

4. Teken ook vloeidiagramme vir die ander twee opsies.

Bradley hou vakansie in Amerika. Hy wil ‘n selfoon huur. Hy het reeds drie verskillende aanbiedinge ondersoek. Hier volg ‘n woordbeskrywing van aanbod 1, ‘n waarde–tabel vir aanbod 2 en ‘n vloeidiagram vir aanbod 3.

Woordbeskrywings:

Aanbod 1: “ADVANCED MOBILE! Laagste oproepkoste! Gewilde foon ! $20 as jy teken, plus 60 sent per oproep!”

Aanbod 2: “GENIE RENTALS

Aanbod 3: “HI–PRO

Tabelle:

Aantal oproepe:	10	20	30	40	50	60
Advanced mobile:						
Genie rentals:	$24	$38	$52	$66	$80	$940
Hi–Pro:						

*Vloeidiagramme:

Advanced mobile:

x

+

Genie rentals:

Advanced mobile:

x

+

Hi–Pro:

15

25

55

x 1

+ 30

$ 15 + $30

$ 25 + $30

$ 55 + $30

5. Daar is ruimte vir jou om vir elke geval die ander twee aanbiedinge te voltooi. Ná jy al ses voltooi het, doen die volgende oefening.

6. Skryf neer watter aanbod Bradley moet kies vir watter omstandighede. Onthou, jy weet byvoorbeeld nie of hy die foon vir twee dae, twee weke of twee maande gaan gebruik nie. Jy weet ook nie hoeveel oproepe hy wil maak nie.

7. Skryf nou neer watter een van die drie maniere om die inligting voor te stel jou die meeste gehelp het toe jy vraag 6 beantwoord het. Gee redes vir jou stellings.

AKTIWITEIT 3

Om verwantskappe uit te klaar met behulp van ‘n model

[LU 2.2, 2.3]

Olga hou van sjokolade–rosyne. Sy het aantekeninge gemaak van die inhoud van elke pakkie wat sy gekoop het. Sy koop altyd by dieselfde winkel, maar partykeer koop sy klein pakkies (50 g), partykeer medium pakkies (100 g) en partykeer groot pakkies (200 g).

Sy het ‘n tabel van die gegewens gemaak.

Pakkie–grootte	50 g	100 g	200 g
Gemiddelde aantal rosyne	78	153	304
Prys per pakkie	R3,80	R7,40	R14,50

Olga het die vervaardigers opgespoor en by hulle uitgevind dat ‘n deel van die prys vir die verpakking is, en die res vir die inhoud. Die verpakkingskoste is redelik eenders vir die drie groottes, maar die grootste deel van die prys dek die rosyne. Die eenheidsprys van die inhoud is dieselfde, ongeag die pakkiegrootte.

Sy het ook uitgevind dat die fabriek baie fyn kontrole uitoefen oor die aantal rosyne in elke pakkie sodat kopers kry waarvoor hulle betaal. Hulle beoog om ten minste 75 rosyne in die 50 g pakkie, 150 in die 100 g pakkie en 300 in die 200 g pakkie te plaas. Om dit te verseker, maak hulle die pakkie rosyne noukeurig met dieselfde massa. Hulle plaas ook gewoonlik ‘n paar ekstra in elke pakkie. Olga het hulle meegedeel dat haar ondervinding met hulle standaarde ooreenstem.

Uit die gegewens moet jy bereken hoeveel die rosyne (uitgesluit verpakking) kos. Gee jou antwoord in rand per kilogram.

Assessering

LU 2

Patrone, Funksies en AlgebraDie leerder is in staat om patrone en verwantskappe te herken, te beskryf en voor te stel, en probleme op te los deur algebraïese taal en vaardighede te gebruik.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

2.1 op verskillende maniere ‘n verskeidenheid numeriese en meetkundige patrone en verwantskappe ondersoek deur dit voor te stel en te veralgemeen, en deur die reëls onderliggend daaraan te verduidelik en te bewys (insluitend patrone in natuurlike en kulturele vorms, en patrone wat die leerder self geskep het);

2.2 voorstellings maak van verwantskappe tussen veranderlikes en dit gebruik sodat invoer– en/of uitvoerwaardes op ‘n verskeidenheid maniere bepaal kan word deur die gebruik van:

2.2.1 woordelikse beskrywings;2.2.2 vloeidiagramme;2.2.3 tabelle;2.2.4 formules en vergelykings;

2.3 wiskundige modelle saamstel wat oplossings vir probleemsituasies voorstel, beskryf en voorsien, en verantwoordelikheid toon teenoor die omgewing en die gesondheid van ander (insluitend probleme

binne menseregte-, sosiale, ekonomiese, kulturele en omgewingskontekste);

2.4 vergelykings oplos deur inspeksie, deur ‘n proses van probeer–en–verbeter of algebraïese prosesse (optellings- en vermenigvuldigngsomgekeerdes, asook faktorisering) en die oplossings kontroleer deur vervanging;

2.5 grafieke op die Cartesiese vlak teken vir gegewe vergelykings (met twee veranderlikes), of die vergelykings of formules bepaal van gegewe grafieke, deur, waar nodig, van tabelle gebruik te maak;

2.6 die ekwivalensie van verskillende beskrywings van dieselfde verwantskap of reël bepaal, ontleed en interpreteer, wat soos volg voorgestel word:

2.6.1 woordeliks;2.6.2 in vloeidiagramme;2.6.3 in tabelle;2.6.4 deur vergelykings of uitdrukkings;

- deur grafieke in die Cartesiese vlak

sodat die nuttigste voorstellingvir ‘n gegewe situasie gekies kan word;

2.8 die eksponentwette gebruik om uitdrukkings te vereenvoudig.

2.9 faktorisering om algebraïese uitdrukkings te vereenvoudig gebruik en vergelykings op te los.

Memorandum

Bespreking

Antwoorde:

1 480 swart; 960 wit; 300 rooi; 240 geel; 240 blou en 180 groen

2 480 swart; 960 wit; 675 rooi; 540 geel; 540 blou en 405 groen

5.

Sylengte van driehoek in sentimeters	2	3	4	5	6	7	8
Aantal krale in driehoek	3	6	10	15	21	28	36
Omtrek van driehoek	6	9	12	15	18	21	24

6.

Grootte van hanger	1	2	3	4	5	x
Aantal driehoek-motiewe	1	3	6	10	15	$x+(x-1)+(x-2)+\ldots+1$
Aantal driehoek-spasies	0	1	3	6	10	$(x-1)+(x-2)+\ldots+1$
Aantal krale in sy van driehoek-motief	4	8	12	16	20	$4x$
Totale aantal krale in hanger	10	30	60	100	150	$10\{x+(x-1)+(x-2)+\ldots+1\}$
Aantal swart krale	1	3	6	10	15	$(x-1)+(x-2)+\ldots$

						+ 1
Totale omtrek van hanger met 1 cm deursnit krale	9	21	33	45	57	$3(4x-1)$

7.

Grootte van hanger	1	2	3	4	5	x
Aantal driehoek-motiewe	1	3	6	10	15	$x+(x-1)+(x-2)+\ldots+1$
Aantal driehoek-spasies	0	1	3	6	10	$(x-1)+(x-2)+\ldots+1$
Aantal krale in sy	5	10	15	20	25	$5x$

van driehoek-motief						
Totale aantal krale in hanger	15	45	90	150	225	15{x + (x–1) + (x–2) + … + 1}
Aantal swart krale	3	9	18	30	45	3{x + (x–1) + (x–2) + … + 1}
Totale omtrek van hanger met 1cm-deursnit krale	12	27	42	57	72	3(5x–1)

AKTIWITEIT 2

1.

Aantal dae:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Away-van:	R750	1500	2250	3000	3750	4500	5250	6000	6750	7500	8250
Best Caravans:	R1560	R1920	2280	2640	3000	3360	3720	4080	4440	4800	5160
Car-a-holiday:	R1490	R2030	2570	3110	3650	4190	4730	5270	5810	6350	6890

As hulle slegs vir drie dae sou weggaan dan is Away-van die goedkoopste. Best Caravans is die goedkoopste vir vakansies van 4 tot 11 dae. Car-a-holiday is nooit die goedkoopste opsie nie, selfs al is die vakansie langer as 11 dae.

3. Invoer $= 9$; uitvoer $= 540 \times 5 + 950 = 3\ 650$

4.

$\times\ 750 + 0$

$\times\ 360 + 1200$

5. Bradley en sy telefone:

- Aanbod 1: “ADVANCED MOBILE! Laagste oproepkoste! Gewilde foon! $20 wanneer jy teken, plus 60 sent per oproep!”
- Aanbod 2: “GENIE RENTALS het ‘n basiese fooi van slegs $10, en oproepe kos $1,40 elk”.

- Aanbod 3: “HI-PRO vir selhuur! Ons vra slegs $1,00 per oproep! Skryf in vir $30”.

Tabelle:

Aantal oproepe:	10	20	30	40	50	60
Advanced mobile:	$26	$32	$38	$44	$50	$56
Genie rentals:	$24	$38	$52	$66	$80	$94
Hi-Pro:	$40	$50	$60	$70	$80	$90

- Vloeidiagramme:
- Advanced mobile:

$\times\ 0,6\ +\ 20$

Genie rentals:

$\times\ 1,4\ +\ 10$

Hi-Pro:

15 $15 + $30

25 × 1 + 30 $**25** + $30

55 $**55** + $30

6. Genie Rentals is die goedkoopste as hy nie meer as ongeveer 10 oproepe wou maak nie. Hi-Pro is nooit die goedkoopste nie. Advanced Mobile is waarskynlik die beste keuse as hy 'n hele rukkie wou bly.

7. Dit is makliker om koste te vergelyk in 'n tabel. 'n Grafiek sou nog beter wees.

AKTIWITEIT 3

- Uit die tabel, varieer die eenheidskoste van rosyne plus verpakking tussen 4,77 sent en 4,87 sent.
- Aangesien die verpakking veronderstel is om baie goedkoop te wees, sou die rosyne 'n bietjie minder as R73 per kilogram kos.

Toets

- Hierdie eenheid het nie 'n toets nie.

'n Studie van grafieke

WISKUNDE

Graad 9

GETALPATRONE

GRAFIESE VOORSTELLINGS

VERGELYKINGS

STATISTIEK

WAARSKYNLIKHEIDSLEER

Module 13

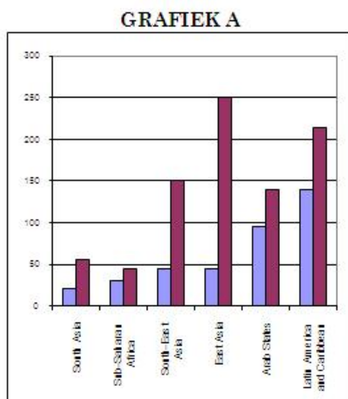
‘N STUDIE VAN GRAFIEKE

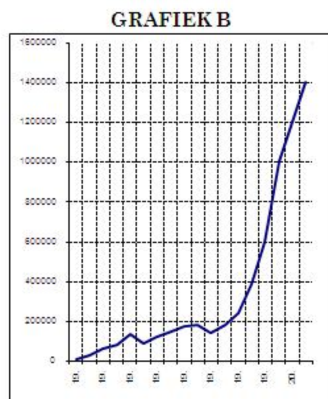
Wat is grafieke nou eintlik?

AKTIWITEIT 1

Om sekere grafieke te bestudeer om hulle te kan verstaan

[LU 1.3, 5.5]





Grafiek A wys hoe die getal TV-stelle per 1 000 mense verander het tussen 1985 en 1995 in ses verskillende streke van die wêreld. Byvoorbeeld, in 1985 het Suid-Asië 20 TV-stelle per 1 000 mense gehad; in 1995 was daar 55 TV-stelle per 1 000 mense.

Grafiek B wys, op die vertikale as, die getal persone in die tronk in die Verenigde State van Amerika gedurende die jare aangetoon op die horisontale as. Byvoorbeeld, daar was 135 000 mense in die tronk in 1940.

- Werk saam in pare; een werk met grafiek A om vraag 1 te beantwoord, en die ander een met grafiek B en vraag 2. Gee redes of verduidelikings vir alle bewerings.

1 Bestudeer **grafiek A**, en skryf dan antwoorde en verduidelikings neer vir hierdie vrae:

1.1 Watter streek het die laagste getal TV-stelle per 1 000 in 1985 gehad?

1.2 Watter streek het die hoogste getal TV-stelle per 1 000 in 1995 gehad?

1.3 In watter streek het die getal TV-stelle per 1 000 die meeste gestyg?

1.4 Is daar ’n streek waar die getal TV-stelle per 1 000 minder geword het?

1.5 Vergelyk Afrika Suid van die Sahara met die Arabiese State en lewer kommentaar op die verandering in TV-stel-getalle.

1.6 Gebruik nou jou verbeelding – hoe sou die situasie wees? – en trek ’n soortgelyke grafiek wat twee ander streke wys: Suid-Afrika en die Verenigde State van Amerika.

2 Bestudeer **grafiek B** en beantwoord hierdie vrae:

2.1 Vanuit die grafiek, probeer skat hoeveel mense in die tronk was in:

a) 1930 b) 1950 c) 1995

2.2 Was daar in 1980 meer of minder as 200 000 mense in die tronk?

2.3 Die grafiek gaan afwaarts net ná 1940. Wat kan

jy daaruit aflei?

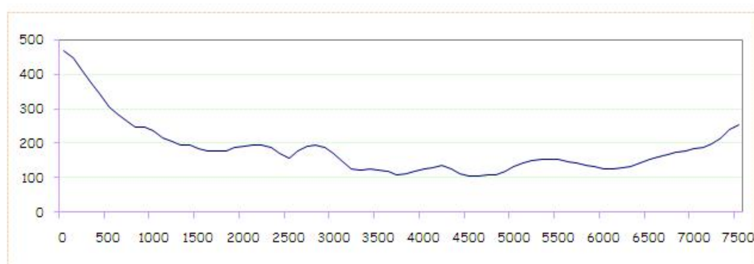
2.4 Skryf neer rofweg hoeveel jaar dit geneem het vir die tronkbevolking om te verdubbel van wat dit in 1950 was.

2.5 Hoe lank het die tronkbevolking geneem om te verdubbel van wat dit in 1985 was?

2.6 Sou jy sê dat die getal mense in die tronk in die VSA pal styg? Gee redes.

2.7 As ’n mens die grafiek se boodskap lees, hoe meen jy sal die tronkbevolking van die VSA in die toekoms daar uitsien?

3 In Aardrykskunde tref ’n mens ’n interessante soort grafiek aan – ’n deursnee-tekening. Hier sien ’n mens hoe die hoogte bo seespieël varieer tussen twee plekke. Die een hieronder is vir die reguit lyn tussen Bottelaryberg en Papegaaiberg, twee heuwels naby Stellenbosch. Al die mates is in meter. Hieruit kan ons sien dat Bottelaryberg (links) ongeveer 470 m bo seespieël is, en Papegaaiberg ongeveer 255 m. As jy vanaf Bottelaryberg in ’n reguit lyn loop, kry jy ná ongeveer 2,5 km ’n holtetjie, en dan, oor nog ’n halwe kilometer, loop jy oor ’n klein heuweltjie.



- So ’n grafiek is van besondere waarde vir padmakers aangesien dit die skuinsste van die terrein aantoon.
- Dit is baie duidelik dat vanaf Bottelaryberg die hoogte sterk val oor ongeveer 750 m. Maar as jy van die kruin van Papegaaiberg af in die rigting van Bottelaryberg stap, neem dit die hoogte omtrent 1,5 km om net so ver te val, wat die roete heelwat minder steil maak.

- Steilte (of helling) word bereken deur die vertikale afstand deur die horisontale afstand te deel, so: vertikaleveranderinghorisontaleverandering. Dit is presies hoe ons later die *gradiënt* van ’n grafiek gaan bereken.

3.1 Wat is die hoogte bo seespieël van die posisie wat presies halfpad tussen die twee heuwels is?

3.2 Wat is die verskil in hoogte van die twee heuwels?

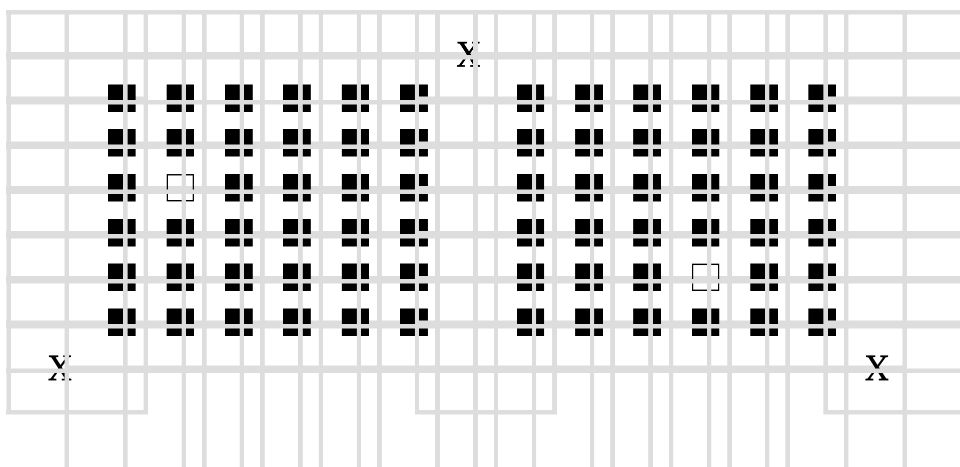
3.3 Wat is die laagste plek, volgens die grafiek?

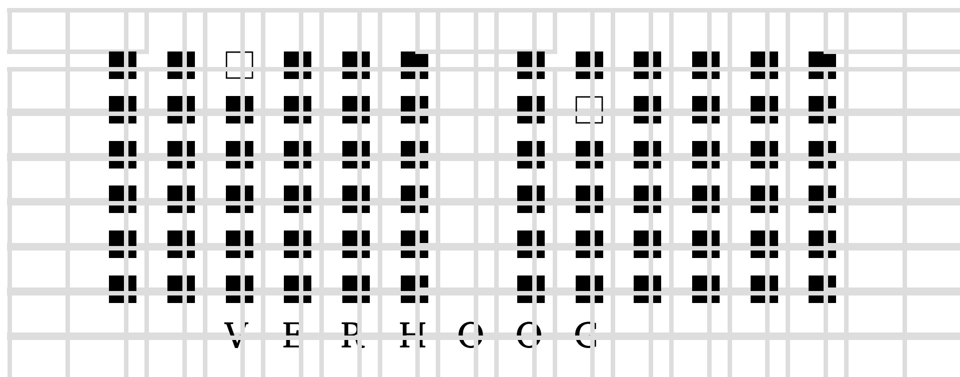
4 Soek self grafieke om uit te pluis. Jy sal grafieke kry in koerante, tydskrifte (motor-, sport- en finansiële tydskrifte) en handboeke van ander vakke. As jy ’n atlas het, is dit ’n goeie plek om interessante grafieke te kry. Indien moontlik, bring hierdie grafieke skool toe vir bespreking. As jy belangstel in die onderwerp van die grafiek, kan jy jouself vrae vra soos dié hierbo.

- In die module oor statistiek sal jy leer van meer en ander grafieke.

AKTIWITEIT 2

Om Cartesiese koördinaatstelsels te verstaan, konstrueer en gebruik





1. Sitplekke in die skoolsaal:

Die diagram stel ’n skoolsaaltjie voor. Die blokkies is sitplekke vir die gehoor. Daar is drie deure (X) – een agter en twee in die middel van die kante. Vanaf die verhoog is die Linkerhelfte en Regterhelfte van die stoele sigbaar aan weerskante van die paadjie. Die ander paadjie skei die voorste stoele (met Sagte sitplekke) van die agterste stoele (met Harde sitplekke).

Die rye word van die middel van die saal van 1 tot 6 vorentoe, en van 1 tot 6 agtertoe genommer, en van 1 tot 6 regs en van 1 tot 6 links, soos van die verhoog gesien.

- Die vier kaartjies vir die sitplekke met die wit blokkies het nommers: L4S1, L5H4, R2S2 en R4H2. Soos jy kan aflei, sê die eerste letter of die sitplek links of regs is; die nommer daarna sê hoe ver die sitplek vanaf die middelste paadjie is. Die volgende letter sê of dit ’n sagte sitplek (voor) is, of ’n harde sitplek (agter), en

die laaste nommer sê hoe ver die plek van die dwarspaadjie af is.

1.1 Vir hoeveel mense is daar plek in die saal?

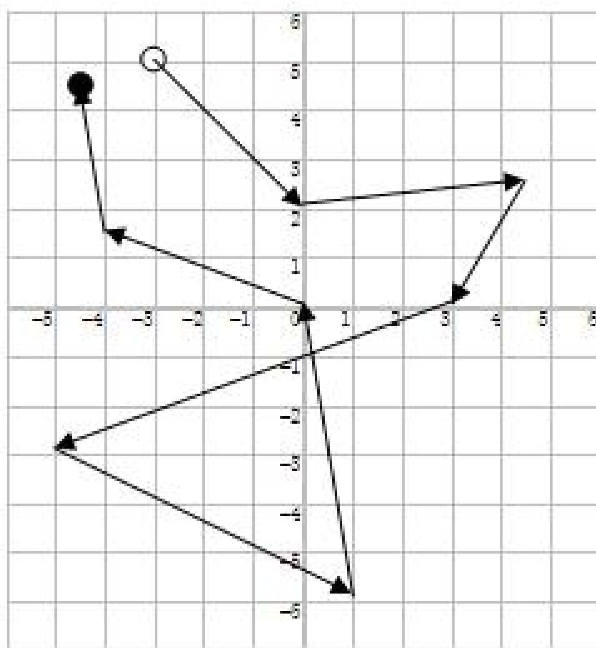
1.2 As jy moet plekke aanwys, moet jy weet watter wit blokkie hoort by watter kaartjie. Vul die korrekte nommer by elke wit blokkie in.

1.3 Soek op die diagram en vul in waar die volgende stoele is: R6S6; R5H1; L1S1; L6S1; L2S5; L3H3; R1H1.

1.4 As daar 25 ekstra stoele in die saal moet kom, kan hulle in die paadjies gesit word. Hoe sou jy die nuwes nommer sonder om die bestaande nommers te verander? Kan die letters nog gebruik word? Wat van die nommers?

2. Nommering van punte op grafiekpapier:

- Hierdie diagram wys die *Cartesiese vlak*.



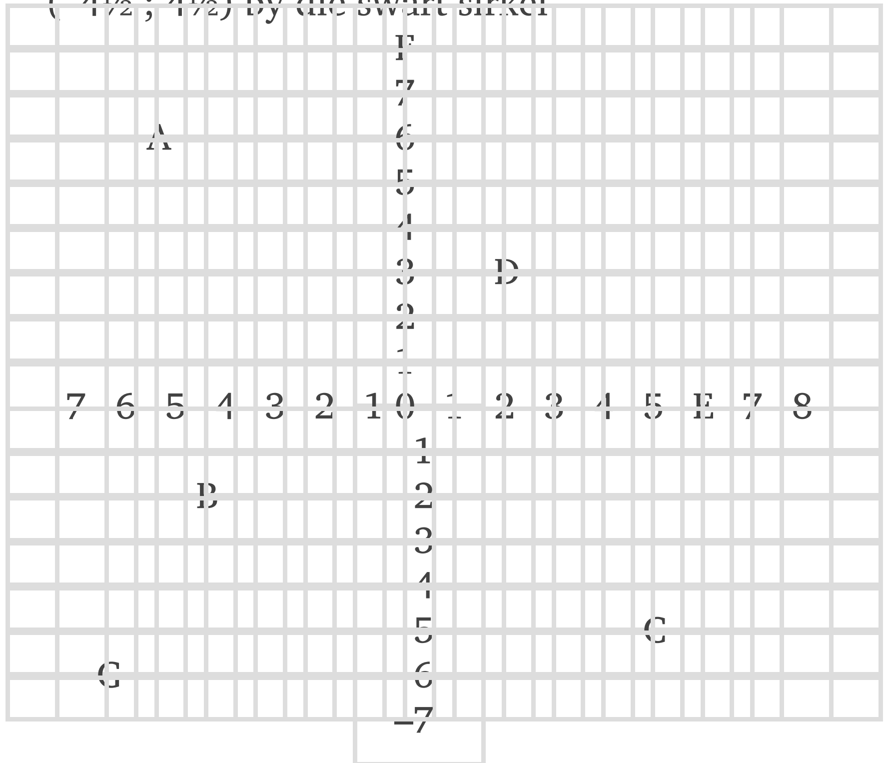
Die getalle is van toepassing op die lyne en NIE die spasies tussen die lyne nie.

Die donker horisontale lyn noem ons die x–as en die donker vertikale lyn is die y–as. Die plek waar die asse mekaar kruis word die oorsprong genoem. Die koördinate van die oorsprong is (0 ; 0). Koördinate word altyd geskryf as twee getalle geskei deur ’n kommapunt, in hakies.

Die eerste getal in die hakies verwys altyd na getalle op die x–as, en die tweede na getalle op die y–as.

- Kom ons neem ’n toer deur die assestelsel. Op

die diagram is die punt (–3 ; 5) met ’n wit sirkel gemerk. Van daar wys die pyltjie na (0 ; 2). Die volgende pyl lei na (4½ ; 2½) en dan na (3 ; 0), (–5 ; –3), (1 ; –6), (0 ; 0), (–4 ; 1½) en (–4½ ; 4½) by die swart sirkel



Maak seker dat jy die werking van koördinate goed verstaan voordat jy aangaan.

Tweede kwadrant	Eerste kwadrant

Derde kwadrant		Vierde kwadrant

Die asse (donker lyne) verdeel die Cartesiese vlak in vier kwadrante.

2.1 Skryf die koördinate neer van die punte A tot G op die diagram. Gebruik kommapunte en hakies, en skryf die twee getalle in die korrekte volgorde.

2.2 Soek die volgende punte op die diagram en verbind hulle in volgorde. Waarvan vorm dit ’n prentjie?

(–4 ; 0) (–4 ; –6) (–3 ; –6) (–3 ; –2) (–2 ; –2)(–2 ; –6) (–1 ; –6) (–1 ; –2) (3 ; –2) (3 ; –6)(5 ; –6) (5 ; 0) (7 ; 0) (7 ; 2) (5½ ; 2)(4½ ; 4) (4 ; 2) (–4 ; 2) (–6 ; 4) (–4 ; 0)

- René Descartes (uitgespreek *dykaar*) is in Frankryk in 1596 gebore, en het aan longontsteking gesterf op ouderdom 54. Gedurende sy leeftyd was daar baie oorloë in Europa, en hy het as soldaat aan baie veldtogte deelgeneem. Hy was nie net ’n wiskundige nie, maar het ook fisika (veral optika), sterrekunde, weerkunde en anatomie, sowel as musiekteorie bestudeer. Hy het sy stelsel, om grafiekpapier te nommer, uitgedink sodat meetkunde met algebra gekombineer kon word om sekere moeilike probleme op te los waaraan hy toe gewerk het. Dit is waarom die diagram nou ’n

*Cartes*iese vlak genoem word.

AKTIWITEIT 3

Om ’n grafiek op die Cartesiese vlak te teken vanaf ’n tabel waardes

1 In hierdie tabel is daar ’n verwantskap tussen ’n getal in die boonste ry (invoerwaarde) en die een reg daaronder (uitvoerwaarde). Van die getalle ontbreek in die blokkies *a*, *b* en *c*.

1.1 Bestudeer die eerste sewe kolomme van die tabel totdat jy die patroon kan ontsyfer en skryf dan die reël neer wat sê hoe om die onderste getal vanaf die boonste te bereken. As *a*, *b* en *c* ook volgens dieselfde reël bereken word, vul in die waardes waarvoor hulle staan.

Invoerwaarde	1	2	3	4	5	6	7	9	12	c
Uitvoerwaarde	17	22	27	32	37	42	47	a	b	77

1.2 Nou gebruik ons die pare waardes uit die kolomme om koördinate te maak. Hulle lyk altyd so:

(invoerwaarde ; uitvoerwaarde),

met die invoerwaarde in die eerste plek.

Hier is die eerste twee: (1 ; 17) en (2 ; 22). Skryf die res op dieselfde wyse neer, insluitend die laaste drie met jou berekende waardes in plek van *a*, *b* en *c*.

84
80
76
72
68
64
60
56
52
48
44
40
36
32
28
24
20
16

12															
8															
4															
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	

1.3 Maak nou 'n kolletjie op hierdie Cartesiese vlak vir elk van jou koördinate uit die tabel.

Jy behoort tien kolletjies in 'n netjiese reguit lyn te hê.

Gebruik 'n liniaal om die lyn te trek.

2 Die volgende tabel toon die kostes van 'n tuinier wat R35 per uur of 'n gedeelte van 'n uur vra.

Ure gewerk	1	1,5	2	2,5	3	4	5	8
Totale bedrag	35	70	70	105	105	140	175	280

2.1 Skryf jou eie verduideliking neer vir die twee R70'e in die tweede ry, asook die twee R105'e.

2.2 Gebruik blokkiespapier soos in die vorige

oefening. Beplan versigtig hoe die getalle op die asse moet lyk sodat al die waardes in die tabel sal inpas, en stip die koördinate uit die tabel as dotjies.

2.3 In hierdie grafiek is dit verkeerd om die punte met ’n reguit lyn te verbind. Hierdie grafiek moet in trappies geteken word. Dit is omdat die tuinier dieselfde bedrag vra om, sê maar, 2 uur en 10 minute, of 2 uur en 25 minute, of 2 uur en 40 minute, of 3 uur te werk. Voltooi die grafiek deur die gepaste trappies te teken.

2.4 Lees van die voltooide grafiek af hoeveel dit sal kos as die tuinier vir 6½ uur werk.

AKTIWITEIT 4

Om te oefen om die Cartesiese koördinaatstelsel te gebruik

[LU 1.3, 2.5]

Malinda is ’n vryskut-boekhouer vir die klein sakeondernemings in haar omgewing. Sy besoek hul kantore gereeld, sê weekliks, en doen hulle boekhouding vir die week. Haar fooie varieer, afhangende van hoe ver sy moet reis en van die soort werk wat sy moet doen. Byvoorbeeld, as sy

alles per hand moet doen, sal sy meer vra as wanneer daar ’n rekenaarstelsel is. Sy het vier tariewe: tarief A is R40 per besoek plus R85 per halfuur of gedeelte; tarief B is R60 per besoek plus R85 per halfuur of gedeelte; tarief C is R25 per besoek plus R150 per uur of gedeelte en tarief D is R200 per uur of gedeelte.

1 Maak nou vier tabelle – een vir elke tarief. Gebruik die tabel hieronder vir die boonste ry van al vier tabelle en voltooi dan die onderste ry van elk self.

Aantal ure	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5	6	7	
Totale bedrag											

2 Jy benodig blokkiespapier vir hierdie grafieke. Beplan versigtig hoe om die asse te nommer sodat al jou waardes op die grafiek sal inpas. Teken al vier grafieke op een koördinaatvlak – maar om hulle te onderskei moet jy vier kleure ink gebruik.

Assessering

Leeruitkomstes(LUs)

LU 1

Getalle, Bewerkings en VerwantskappeDie leerder is in staat om getalle en die verwantskappe daarvan te herken, te beskryf en voor te stel, en om tydens probleemoplossing bevoeg en met selfvertroue te tel, te skat, te bereken en te kontroleer.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

1.2 rasionale getalle (insluitend baie klein getalle in wetenskaplike notasie) herken, gebruik en voorstel, en in staat is om sonder huiwering tussen ekwivalente vorms in gepaste kontekste te beweeg;

1.3 probleme in konteks oplos, insluitend kontekste wat gebruik kan word om ‘n bewustheid van ander leerareas, asook van menseregte-, sosiale, ekonomiese en omgewingsake, te bevorder, soos:

1.3.1 finansiële kontekste (insluitend wins en verlies, begrotings, rekenings, lenings, enkelvoudige en saamgestelde rente, huurkoop, wisselkoerse, kommissie, huur en die bankwese);

1.3.2 meting in die konteks van Natuurwetenskappe en Tegnologie;

1.4 probleme oor verhouding, koers en proporsie (direk en indirek) oplos.

1.7 die eienskappe van rasionale getalle herken, beskryf en gebruik.

LU 2

Patrone, Funksies en AlgebraDie leerder is in staat om patrone en verwantskappe te herken, te beskryf en voor te stel, en probleme op te los deur algebraïese taal en vaardighede te gebruik.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

2.1 op verskillende maniere ‘n verskeidenheid numeriese en meetkundige patrone en verwantskappe ondersoek deur dit voor te stel en te veralgemeen, en deur die reëls onderliggend daaraan te verduidelik en te bewys (insluitend patrone in natuurlike en kulturele vorms, en patrone wat die leerder self geskep het);

2.2 voorstellings maak van verwantskappe tussen veranderlikes en dit gebruik sodat invoer– en/of uitvoerwaardes op ‘n verskeidenheid maniere bepaal kan word deur die gebruik van:

2.2.1 woordelikse beskrywings;2.2.2 vloeidiagramme;2.2.3 tabelle;2.2.4 formules en vergelykings;

2.3 wiskundige modelle saamstel wat oplossings vir probleemsituasies voorstel, beskryf en voorsien, en verantwoordelikheid toon teenoor die omgewing en die gesondheid van ander (insluitend probleme binne menseregte-, sosiale, ekonomiese, kulturele en omgewingskontekste);

2.4 vergelykings oplos deur inspeksie, deur ‘n proses van probeer–en–verbeter of algebraïese prosesse (optellings- en vermenigvuldigngsomgekeerdes, asook faktorisering) en die oplossings kontroleer deur vervanging;

2.5 grafieke op die Cartesiese vlak teken vir gegewe vergelykings (met twee veranderlikes), of die vergelykings of formules bepaal van gegewe grafieke, deur, waar nodig, van tabelle gebruik te maak;

2.6 die ekwivalensie van verskillende beskrywings van dieselfde verwantskap of reël bepaal, ontleed en interpreteer, wat soos volg voorgestel word:

2.6.1 woordeliks;2.6.2 in vloeidiagramme;2.6.3 in tabelle;2.6.4 deur vergelykings of uitdrukkings;

- deur grafieke in die Cartesiese vlak

sodat die nuttigste voorstellingvir 'n gegewe situasie gekies kan word;

2.8 die eksponentwette gebruik om uitdrukkings te vereenvoudig.

2.9 faktorisering om algebraïese uitdrukkings te vereenvoudig gebruik en vergelykings op te los.

LU 3

Ruimte en VormDie leerder is in staat om eienskappe van en verwantskappe tussen tweedimensionele vorms en driedimensionele voorwerpe in 'n verskeidenheid oriëntasies en posisies te beskryf en voor te stel.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

3.7 verskeie voorstellingstelsels gebruik om posisie/ligging en beweging daartussen te beskryf, insluitend:

3.7.1 geordende roosters;

3.7.2 die Cartesiese vlak (vier kwadrante);

3.7.3 kompasrigtings in grade;

Leeruitkomstes(LUs)

LU 1

Getalle, Bewerkings en VerwantskappeDie leerder is in staat om getalle en die verwantskappe daarvan te herken, te beskryf en voor te stel, en om tydens

probleemoplossing bevoeg en met selfvertroue te tel, te skat, te bereken en te kontroleer.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

1.2 rasionale getalle (insluitend baie klein getalle in wetenskaplike notasie) herken, gebruik en voorstel, en in staat is om sonder huiwering tussen ekwivalente vorms in gepaste kontekste te beweeg;

1.3 probleme in konteks oplos, insluitend kontekste wat gebruik kan word om ‘n bewustheid van ander leerareas, asook van menseregte-, sosiale, ekonomiese en omgewingsake, te bevorder, soos:

1.3.1 finansiële kontekste (insluitend wins en verlies, begrotings, rekenings, lenings, enkelvoudige en saamgestelde rente, huurkoop, wisselkoerse, kommissie, huur en die bankwese);

1.3.2 meting in die konteks van Natuurwetenskappe en Tegnologie;

1.4 probleme oor verhouding, koers en proporsie (direk en indirek) oplos.

1.7 die eienskappe van rasionale getalle herken, beskryf en gebruik.

LU 2

Patrone, Funksies en AlgebraDie leerder is in staat om patrone en verwantskappe te herken, te beskryf en voor te stel, en probleme op te los deur algebraïese taal en vaardighede te gebruik.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

2.1 op verskillende maniere ‘n verskeidenheid numeriese en meetkundige patrone en verwantskappe ondersoek deur dit voor te stel en te veralgemeen, en deur die reëls onderliggend

daaraan te verduidelik en te bewys (insluitend patrone in natuurlike en kulturele vorms, en patrone wat die leerder self geskep het);

2.2 voorstellings maak van verwantskappe tussen veranderlikes en dit gebruik sodat invoer– en/of uitvoerwaardes op ‘n verskeidenheid maniere bepaal kan word deur die gebruik van:

2.2.1 woordelikse beskrywings;2.2.2 vloeidiagramme;2.2.3 tabelle;2.2.4 formules en vergelykings;

2.3 wiskundige modelle saamstel wat oplossings vir probleemsituasies voorstel, beskryf en voorsien, en verantwoordelikheid toon teenoor die omgewing en die gesondheid van ander (insluitend probleme binne menseregte-, sosiale, ekonomiese, kulturele en omgewingskontekste);

2.4 vergelykings oplos deur inspeksie, deur ‘n proses van probeer–en–verbeter of algebraïese prosesse (optellings- en vermenigvuldigngsomgekeerdes, asook faktorisering) en die oplossings kontroleer deur vervanging;

2.5 grafieke op die Cartesiese vlak teken vir gegewe vergelykings (met twee veranderlikes), of die vergelykings of formules bepaal van gegewe grafieke, deur, waar nodig, van tabelle gebruik te maak;

2.6 die ekwivalensie van verskillende beskrywings van dieselfde verwantskap of reël bepaal, ontleed en interpreteer, wat soos volg voorgestel word:

2.6.1 woordeliks;2.6.2 in vloeidiagramme;2.6.3 in tabelle;2.6.4 deur vergelykings of uitdrukkings;

- deur grafieke in die Cartesiese vlak

sodat die nuttigste voorstellingvir ‘n gegewe situasie gekies kan word;

2.8 die eksponentwette gebruik om uitdrukkings te vereenvoudig.

2.9 faktorisering om algebraïese uitdrukkings te vereenvoudig gebruik en vergelykings op te los.

LU 3

Ruimte en VormDie leerder is in staat om eienskappe van en verwantskappe tussen tweedimensionele vorms en driedimensionele voorwerpe in ‘n verskeidenheid oriëntasies en posisies te beskryf en voor te stel.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

3.7 verskeie voorstellingstelsels gebruik om posisie/ ligging en beweging daartussen te beskryf, insluitend:

3.7.1 geordende roosters;

3.7.2 die Cartesiese vlak (vier kwadrante);

3.7.3 kompasrigtings in grade;

Leeruitkomstes(LUs)

LU 1

Getalle, Bewerkings en VerwantskappeDie leerder is in staat om getalle en die verwantskappe daarvan te herken, te beskryf en voor te stel, en om tydens probleemoplossing bevoeg en met selfvertroue te tel, te skat, te bereken en te kontroleer.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

1.2 rasionale getalle (insluitend baie klein getalle in wetenskaplike notasie) herken, gebruik en voorstel, en in staat is om sonder huiwering tussen

ekwivalente vorms in gepaste kontekste te beweeg;
1.3 probleme in konteks oplos, insluitend kontekste wat gebruik kan word om ‘n bewustheid van ander leerareas, asook van menseregte-, sosiale, ekonomiese en omgewingsake, te bevorder, soos:
1.3.1 finansiële kontekste (insluitend wins en verlies, begrotings, rekenings, lenings, enkelvoudige en saamgestelde rente, huurkoop, wisselkoerse, kommissie, huur en die bankwese);
1.3.2 meting in die konteks van Natuurwetenskappe en Tegnologie;
1.4 probleme oor verhouding, koers en proporsie (direk en indirek) oplos.
1.7 die eienskappe van rasionale getalle herken, beskryf en gebruik.
LU 2
Patrone, Funksies en AlgebraDie leerder is in staat om patrone en verwantskappe te herken, te beskryf en voor te stel, en probleme op te los deur algebraïese taal en vaardighede te gebruik.
Dit is duidelik wanneer die leerder:
2.1 op verskillende maniere ‘n verskeidenheid numeriese en meetkundige patrone en verwantskappe ondersoek deur dit voor te stel en te veralgemeen, en deur die reëls onderliggend daaraan te verduidelik en te bewys (insluitend patrone in natuurlike en kulturele vorms, en patrone wat die leerder self geskep het);
2.2 voorstellings maak van verwantskappe tussen veranderlikes en dit gebruik sodat invoer– en/of uitvoerwaardes op ‘n verskeidenheid maniere bepaal

kan word deur die gebruik van:
2.2.1 woordelikse beskrywings;2.2.2 vloeidiagramme;2.2.3 tabelle;2.2.4 formules en vergelykings;
2.3 wiskundige modelle saamstel wat oplossings vir probleemsituasies voorstel, beskryf en voorsien, en verantwoordelikheid toon teenoor die omgewing en die gesondheid van ander (insluitend probleme binne menseregte-, sosiale, ekonomiese, kulturele en omgewingskontekste);
2.4 vergelykings oplos deur inspeksie, deur ‘n proses van probeer–en–verbeter of algebraïese prosesse (optellings- en vermenigvuldigngsomgekeerdes, asook faktorisering) en die oplossings kontroleer deur vervanging;
2.5 grafieke op die Cartesiese vlak teken vir gegewe vergelykings (met twee veranderlikes), of die vergelykings of formules bepaal van gegewe grafieke, deur, waar nodig, van tabelle gebruik te maak;
2.6 die ekwivalensie van verskillende beskrywings van dieselfde verwantskap of reël bepaal, ontleed en interpreteer, wat soos volg voorgestel word:
2.6.1 woordeliks;2.6.2 in vloeidiagramme;2.6.3 in tabelle;2.6.4 deur vergelykings of uitdrukkings;

- deur grafieke in die Cartesiese vlak

sodat die nuttigste voorstellingvir ‘n gegewe situasie gekies kan word;
2.8 die eksponentwette gebruik om uitdrukkings te vereenvoudig.

2.9 faktorisering om algebraïese uitdrukkings te vereenvoudig gebruik en vergelykings op te los.

LU 3

Ruimte en VormDie leerder is in staat om eienskappe van en verwantskappe tussen tweedimensionele vorms en driedimensionele voorwerpe in ‘n verskeidenheid oriëntasies en posisies te beskryf en voor te stel.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

3.7 verskeie voorstellingstelsels gebruik om posisie/ ligging en beweging daartussen te beskryf, insluitend:

3.7.1 geordende roosters;

3.7.2 die Cartesiese vlak (vier kwadrante);

3.7.3 kompasrigtings in grade;

LU 5

DatahanteringDie leerder is in staat om data te versamel, op te som, voor te stel en krities te ontleed om gevolgtrekkings en voorspellings te maak en om toevallige variasie te interpreteer en te bepaal.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

5.1 vrae stel oor menseregte-, sosiale, politieke, omgewings- en ekonomiese sake in Suid-Afrika;

5.2 geskikte metodes kies, staaf en gebruik vir die versameling van data(alleen en/of as lid van ‘n groep of span), insluitend vraelyste, onderhoude, eksperimente en bronne soos boeke, tydskrifte en die Internet, om vrae te beantwoord en gevolgtrekkings en voorspellings oor die omgewing te maak;

5.3 numeriese data op verskillende maniere organiseer ten einde ‘n opsomming te maak deur die volgende vas te stel:
5.3.1 bepalers van sentrale neiging;
5.3.2 bepalers van verspreiding;
5.4 ‘n verskeidenheid grafieke met die hand of met behulp van tegnologie teken om data voor te stel en te interpreteer, insluitend:
5.4.1 staafgrafieke en dubbele staafgrafieke;
5.4.2 histogramme met gegewe en eie intervalle;
5.4.3 sirkeldiagramme;
5.4.4 lyn- en gebroke lyngrafieke;
5.4.5 verspreidingsgrafieke;
5.5 data krities lees en interpreteer, met ‘n bewustheid dat fout- en manipulasiebronne kan bestaan, om gevolgtrekkings en voorspellings oor die volgende te maak:
5.5.1 sosiale, omgewing– en politieke sake (bv. misdaad, staatsbesteding, bewaring, MIV/VIGS);
5.5.2 eienskappe van teikengroepe (bv. ouderdom, geslag, ras, sosio-ekonomiese groep);
5.5.3 houdings of menings van mense t.o.v. sekere sake (bv. rook, toerisme, sport);
5.5.4 enige ander menseregte- en inklusiwiteitsake;
5.6 situasies met ewe waarskynlike uitkomste beskou, en
5.6.1 waarskynlikhede vir saamgestelde gebeure bepaal deur tweerigtingtabelle en boomdiagramme te gebruik;
5.6.2 die waarskynlikheid vir die uitkomste van gebeure bepaal en die relatiewe frekwensie daarvan

in eenvoudige eksperimente voorspel;
5.6.3 die verskille tussen die waarskynlikheid van uitkomste en die relatiewe frekwensie daarvan bespreek.

Memorandum

Vergelykings en grafieke

WISKUNDE

Graad 9

GETALPATRONE

GRAFIESE VOORSTELLINGS

VERGELYKINGS

STATISTIEK

WAARSKYNLIKHEIDSLEER

Module 14

VERGELYKINGS EN GRAFIEKE

AKTIWITEIT 1

Om te begryp hoe om vergelykings op 'n grafiek voor te stel

[LU 2.2, 2.5, 2.6]

Voorbeeld: Die vergelyking $y = 3x + 2$ sê hoe die waardes van x en y verwant is – dit wys die verwantskap tussen twee veranderlikes, x en y.

Byvoorbeeld, as x gelyk is aan 5 , dan kan y se waarde bereken word uit $3 \times 5 + 2 = 17$. Ons substitueer die waarde 5 vir die x, en voltooi die berekening.

Langsaan is ’n tabel met sommige berekeninge.

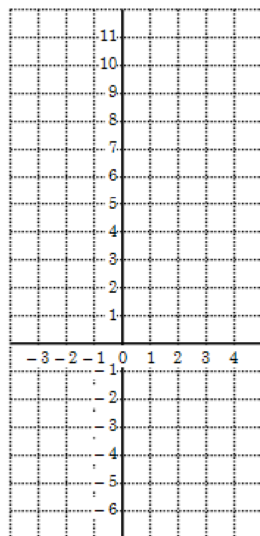
x	2		5		8	
y	–4		17		26	

Die nut van ’n tabel is dat dit vir ons die koördinate gee wat ons op ’n assestelsel kan stip. Hieruit kan ’n grafieklyn geteken word, wat vir ons die prentjie gee van die verwantskap tussen x en y.

1 Voltooi die tabelle vanaf die gegewe vergelykings hieronder, in groepe van ongeveer 4 of 5 leerders. Elkeen kan ’n ander tabel maak en dan kan julle die antwoorde bespreek en inskryf op julle eie tabelle. Onder elke tabel is ’n assestelsel waar die grafiek geteken moet word. Al hierdie grafieke is reguit lyne; dus is dit korrek om die punte te verbind.

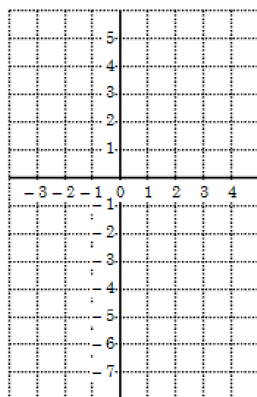
1.1 $y = -4x + 3$

x	–2	–1	0	1	2
y					



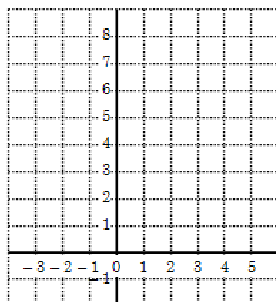
1.2 $y = 3x - 4$

x	–1	0	2	3
y				



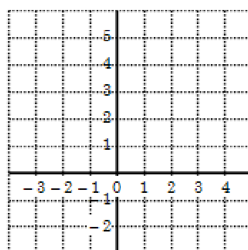
1.3 $y = x + 5$

x	–2	–1	0	1	2	3
y						



1.4 $y = 4$ (!!)

x	–2	–1	0	2	3
y					

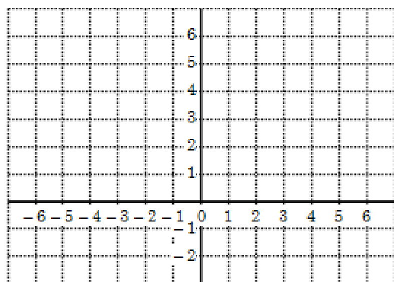


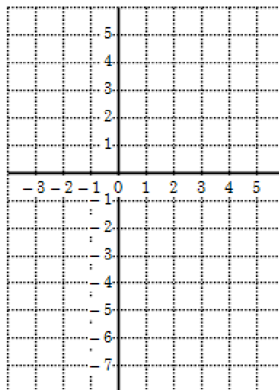
1.5 $y = ½x + 1$

x	–4	–2	0	2	4	6
y						

1.6 $y = –2x$

x	–2	3
y		





2 Bespreek in die groep wat gebeur met die grafieke. Vergelyk elke grafiek met sy vergelyking. Hier is ’n paar voorstelle om te ondersoek:

2.1 Wat is die effek op die grafiek van die koëffisiënt van x in die vergelyking? Wat gebeur as die koëffisiënt negatief is?

2.2 In 1.6 het die tabel slegs twee kolomme. Is meer as twee kolomme nodig as jy weet dit gaan ’n reguitlyngrafiek wees?

2.3 Vergelyk 1.1 en 1.5 om uit te vind wat die konstante aan die grafiek doen.

Hier is ’n opsomming van die woorde oor vergelykings, tabelle en grafieke. Hierdie inligting

moet gememoriseer word – jy kan nie behoorlik met grafieke werk as jy nie die woorde ken nie.

Vergelyking:	x	y
Vergelyking:	Onafhanklike veranderlike	Afhanklike veranderlike
Vloeidiagram:	Invoerwaarde	Uitvoerwaarde
Tabel:	Boonste ry	Tweede ry
Koördinate:	Eerste koördinaat	Tweede koördinaat
Grafiek:	x as	y as
Grafiek:	Horisontale as	Vertikale as

AKTIWITEIT 2

Om al die eienskappe van die reguitlyngrafiek te begryp en toe te pas

[LU 2.5]

1 In die vorige aktiwiteit het jy vergelykings gebruik om tabelle te maak waarvandaan die grafieke getrek kon word. Dit is egter ook moontlik om ’n grafiek direk vanaf ’n vergelyking te trek sonder die gebruik van ’n tabel. Dit is duidelik uit grafiek 1.6 hierbo dat ons slegs twee punte benodig om ’n reguit lyn deur die twee punte te trek. Dus, ons het nie ’n tabel

nodig om die grafiek van 'n reguit lyn te trek nie.

In hierdie deel gaan ons herhaaldelik terug verwys na die ses grafieke in die vorige oefening.

Kom ons ondersoek eerstens die struktuur van die vergelyking:

$y = mx + c$ is die standaardvorm van die vergelyking:

y is aan die linkerkant van die gelyk–teken, en y het geen koëffisiënt nie (dis dieselfde as om te sê dat die koëffisiënt 1 is, maar ons skryf dit nie neer nie).

Regs van die gelyk–teken kan daar een óf twee terme wees (sien vergelykings 1.5 en 1.6 hierbo). As daar twee terme is, word die term in x eerste geskryf – die x kan enige getal (positief, negatief of 'n breuk) as koëffisiënt neem.

In die standaardvorm skryf ons m om vir die koëffisiënt te staan. As die koëffisiënt 1 is, skryf ons dit weer eens nie.

Die c staan vir 'n konstante – enige getal wat nie 'n veranderlike is nie – positief, negatief of 'n breuk.

Die vergelyking $y = mx + c$ is die algemene vergelyking vir alle reguit lyne. Maar $y = -3x + 2$ is die bepalende vergelyking vir 'n spesifieke reguit lyn.

Hoe om vergelykings in die standaardvorm te skryf: Hier is ’n voorbeeld:

$6x + 2y - 1 = 0$ Hou die term in y aan die linkerkant; skuif die ander regs.

$2y = -6x + 1$ Maak die koeffisiënt van $y = 1$: deel al die terme deur 2.

$y = -3x + ½$ Dis die standaardvorm.

Hier is $m = -3$ en $c = ½$.

Oefen ’n paar – skryf ook m en c neer, soos hierbo.

1.1 $2x + y = 3$

1.2 $3y - 9 = 6x$

1.3 $3x = 6y$

1.4 $2y - 8 = 0$

2 Wat beteken die gradiënt?

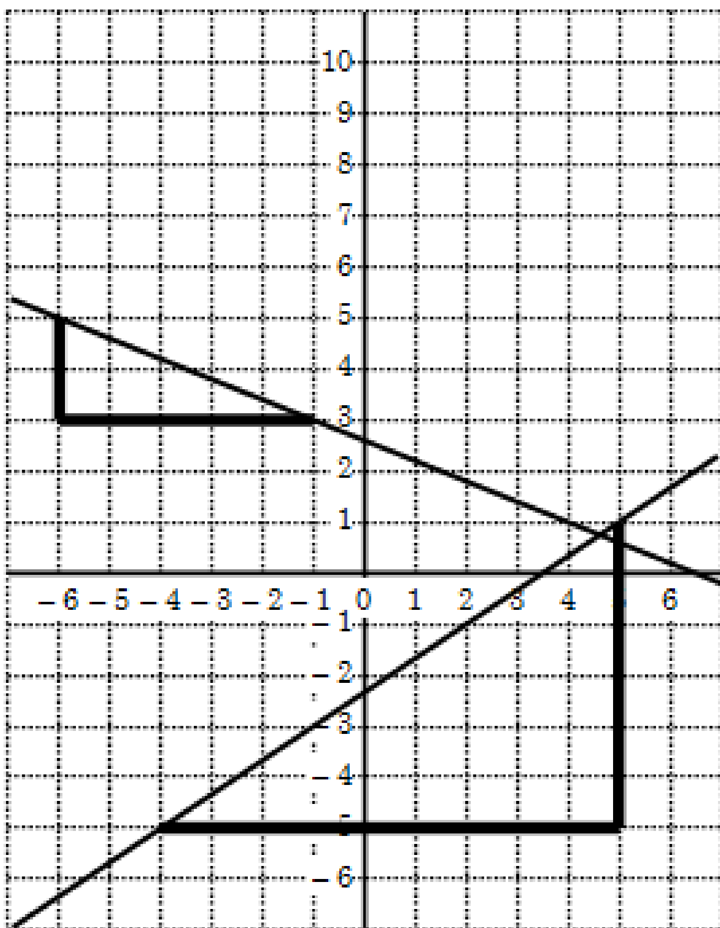
Ons het alreeds verneem dat die steilte van ’n grafiek bereken kan word – dit is baie maklik as die grafiek ’n reguit lyn is. Die lyn is ewe steil oral – ons sê dat die gradiënt van ’n reguit lyn konstant bly.

Kyk weer na die waardes van m in die ses vorige grafieke.

As jy reg gewerk het, sal jou grafiek opwaarts na regs loop as m positief is, en afwaarts na regs waar m negatief is.

Anders gestel, m gee vir ons die gradiënt. (Wat, meen jy, gaan aan by $y = 4$?)

Met ’n positiewe m kry ons die gradiënt vanuit die aantal eenhede wat die lyn styg vir elke één eenheid wat dit regs loop. As m negatief is, kry ons die gradiënt uit die aantal eenhede wat die lyn val vir elke één eenheid wat dit regs loop.



Twee voorbeelde: Ons voltooi twee reghoekige driehoeke langs die lyne in gerieflike posisies op die grafiek, dan kan ons die gradiënt maklik aflees:

Vir die boonste lyn: $m = -25$, negatief omdat die lyn na regs val; 2 is die hoogte van die driehoek en 5 is sy lengte.

Vir die onderste lyn: $m = +69 = 23$, met 6 die hoogte van die driehoek, en 9 sy lengte. Ons laat die + uit, en ons vereenvoudig die breuk.

2.1 Gaan nou weer terug na die vorige ses grafieke en herhaal hierdie proses om te bevestig dat die m in die vergelyking ooreenstem met die gradiënt wat jy uit die grafiek self bereken. Let ook op hoe die grootte van m die steilte van die grafiek aandui.

3 Om te bepaal waar die lyn die y-as sny (ons noem dit die y-afsnit):

Let op dat die konstante term (c) in die vergelyking presies sê waar die lyn die y-as sny.

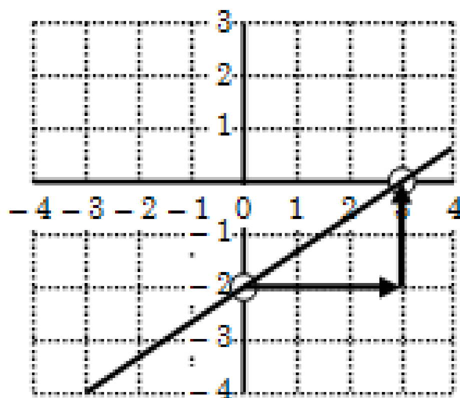
Byvoorbeeld, in $y = 3x – 4$, is die y-afsnit by –4 op die y-as.

Bevestig dat dit so is vir al ses grafieke.

Ons het nou ’n metode om ’n reguit lyn te skets vanuit ’n gegewe vergelyking in die standaardvorm. Ons het nie ’n tabel nodig nie – ons gebruik eenvoudig die y-afsnit (die c), en die gradiënt (die m).

Merk die y-afsnit op die grafiekpapier. Gebruik nou die gradiënt in die vorm van ’n breuk – as dit ’n heelgetal is, skryf dit met 1 as noemer. Vanaf die y-afsnit, tel net soveel eenhede na regs as die noemer. Van daaraf, tel soveel eenhede as die teller op as m

positief is, of af as m negatief is. Hier is twee voorbeelde:

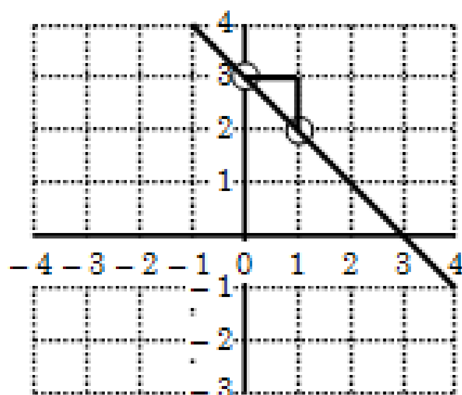


(a) $y = 23x - 2$

Die y-afsnit is –2, by die sirkeltjie op die y-as. Die gradiënt is 23, dus beweeg ons drie eenhede regs van die sirkeltjie, en dan twee eenhede op (nie af nie – die gradiënt is positief). Nog ’n sirkeltjie wys waar ons nou is. Trek nou die reguit lyn deur hierdie twee punte.

(b) y = –x + 3

Die y-afsnit is 3, by die sirkeltjie. Die gradiënt is –1; verander dit na -11. Ons beweeg een eenheid (noemer) regs en een eenheid af (nie op nie). Ons eindig by (1 ; 2), by die tweede sirkeltjie. Trek die lyn deur die twee punte.



Teken nou die volgende grafieke d.m.v. die y-afsnit / gradiënt-metode soos hierbo.

3.1 $y = -3x + 1$

3.2 $y = 13x - 52$

3.3 $y = -34x$

3.4 $4x - 3y = 5$

4 In probleem 3.4 hierbo moes jy eers die vergelyking in die standaardvorm skryf om m en c te verkry om die y-afsnit/gradiënt metode te gebruik. Dis ’n hele klomp ekstra werk.

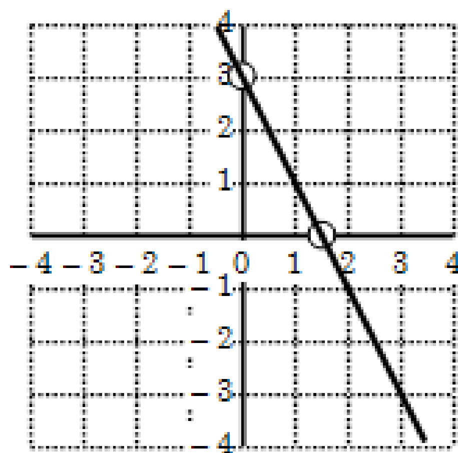
Maar daar is ’n ander manier om die twee punte te verkry. As ons kan uitvind waar die grafiek die x-as sowel as die y-as sny, dan kan ons die lyn deur die twee afsnitte trek!

	y – afsnit	x – afsnit
$y = 3x - 4$	(0 ; –4)	1 1 3 ; 0
$y = -4x + 3$	(0 ; 3)	3 4 ; 0
$y = ½x + 1$	(0 ; 1)	(–2 ; 0)

Terug by die vorige ses grafieke: hierdie tabel gee die x- en y-afsnitte van drie van hulle as koördinaat-pare.

Die belangrike punt om na op te let is dat die y–afsnit altyd ’n nul in die x-koördinaat se plek het, en die x-afsnit altyd ’n nul in die y–koördinaat se plek het.

Ons kan nou die vergelyking neem, net soos dit is, en die x gelyk stel aan nul. As ons dan vereenvoudig, kry ons die y-afsnit. Stel ons die y in die vergelyking gelyk aan nul, en vereenvoudig, kry ons die x-afsnit. Kom ons kyk hoe dit werk vir die vergelyking 9 – 6x = 3y (definitief nie in die standaardvorm nie):



Bereken die y-afsnit:

Substitueer 0 vir x:

$9 - 6(0) = 3y$ □ $9 - 0 = 3y$ □ $9 = 3y$ □ $3y = 9$ □ $y = 3$

Die y-afsnit in koördinaatvorm is (0 ; 3)

Stip hierdie punt op die grafiek.

Bereken die x-afsnit:

Substitueer 0 vir y:

$9 - 6x = 3(0)$ □ $9 - 6x = 0$ □ $9 = 6x$ □ $6x = 9$ □ $x = 96 = 32$

Die x-afsnit in koördinaatvorm is 32;0

Stip hierdie punt op die grafiek. Trek nou die reguit lyn deur die twee afsnitte, soos op die skets.

Dit is ’n baie maklike en gerieflike metode. As jy konsentreer en versigtig werk, sal dinge nie maklik verkeerd loop nie. Oefen die metode op die volgende vergelykings:

4.1 $4y + 3x = 4$

4.2 $6y + 15 = 2x$

4.3 $3x + 4y = 0$

4.4 $3y + 5 = 4x$

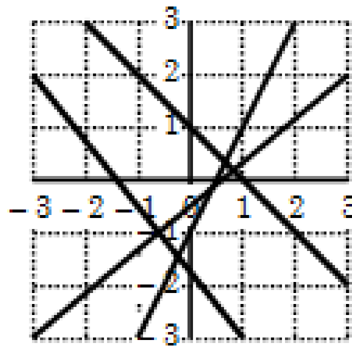
4.5 $2y + 8 = 6x$

4.6 $4y - 2x - 4 = 0$

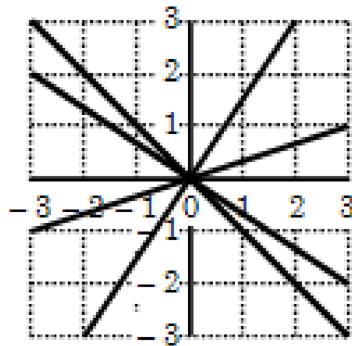
Lyk hierdie vergelykings bekend?

5 Daar is nog ’n paar spesiale gevalle om na te kyk. Met die vergelyking in die standaardvorm kan ons heelwat aflei omtrent die grafiek.

Ons weet reeds dat die standaardvorm van die reguitlyn-grafiek $y = mx + c$ is. As c nul is, word die vergelyking $y = mx$; as m nul is, word die vergelyking $y = c$.



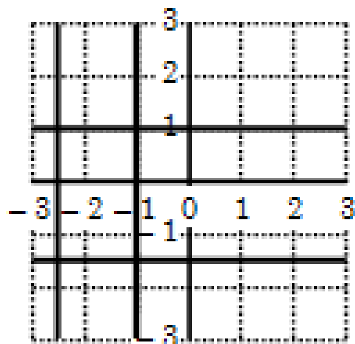
y = mx + c, met nóg m nóg c nul, is die vergelyking van die lyne wat nie deur die oorsprong loop nie, en ook nie horisontaal of vertikaal is nie. Daar is party van hulle in die eerste diagram. Om hierdie grafieke te skets is óf die y-afsnit/gradiënt óf die twee–afsnit metode geskik.



y = mx (c is nul) is die vergelyking van lyne wat nóg horisontaal nóg vertikaal is, maar wel deur die oorsprong loop – soos te wagte, aangesien c nul is, d.w.s die y-afsnit is nul. In die tweede diagram is

vier van hulle. Die y-afsnit/gradiënt metode is die maklikste om hierdie grafieke mee te teken.

y = c is die vergelyking van alle horisontale lyne, soos jy vantevore gesien het. Skets hulle deur ’n horisontale lyn deur die y-afsnit (c) te trek.



As die vergelyking x = k is, met k ’n konstante, stel dit ’n vertikale lyn voor wat deur k op die x-as loop. Trek sulke lyne deur k op die x-as te merk en dan ’n vertikale lyn deur die punt te trek.In die derde diagram verskyn party van hierdie grafieke.

Voorsien van al die goeie raad hierbo, behoort jy maklik die vergelykings van hierdie twaalf grafieke te kan bepaal. Indien nie, sal jy hulp kry in die volgende deel.

Assessering

LU 2
Patrone, Funksies en AlgebraDie leerder is in staat om patrone en verwantskappe te herken, te beskryf en voor te stel, en probleme op te los deur algebraïese taal en vaardighede te gebruik.
Dit is duidelik wanneer die leerder:
2.1 op verskillende maniere 'n verskeidenheid numeriese en meetkundige patrone en verwantskappe ondersoek deur dit voor te stel en te veralgemeen, en deur die reëls onderliggend daaraan te verduidelik en te bewys (insluitend patrone in natuurlike en kulturele vorms, en patrone wat die leerder self geskep het);
2.2 voorstellings maak van verwantskappe tussen veranderlikes en dit gebruik sodat invoer– en/of uitvoerwaardes op 'n verskeidenheid maniere bepaal kan word deur die gebruik van:
2.2.1 woordelikse beskrywings;2.2.2 vloeidiagramme;2.2.3 tabelle;2.2.4 formules en vergelykings;
2.3 wiskundige modelle saamstel wat oplossings vir probleemsituasies voorstel, beskryf en voorsien, en verantwoordelikheid toon teenoor die omgewing en die gesondheid van ander (insluitend probleme binne menseregte-, sosiale, ekonomiese, kulturele en omgewingskontekste);
2.4 vergelykings oplos deur inspeksie, deur 'n proses van probeer–en–verbeter of algebraïese prosesse (optellings- en vermenigvuldigngsomgekeerdes, asook faktorisering) en die oplossings kontroleer deur vervanging;

2.5 grafieke op die Cartesiese vlak teken vir gegewe vergelykings (met twee veranderlikes), of die vergelykings of formules bepaal van gegewe grafieke, deur, waar nodig, van tabelle gebruik te maak;
2.6 die ekwivalensie van verskillende beskrywings van dieselfde verwantskap of reël bepaal, ontleed en interpreteer, wat soos volg voorgestel word:
2.6.1 woordeliks;2.6.2 in vloeidiagramme;2.6.3 in tabelle;2.6.4 deur vergelykings of uitdrukkings;deur grafieke in die Cartesiese vlak sodat die nuttigste voorstellingvir ‘n gegewe situasie gekies kan word.

Memorandum

Vergelykings en grafieke

Uit die eerste oefening met die ses vergelykings volg hierdie belangrike punte: die skuinste van gradiënte (beide positief en negatief) van die lyne; die y-afsnit en die feit dat hierdie waardes maklik afgelei kan word vanuit die standaardvorm van die vergelyking. Die opvoeder kan die leerders lei om af te lei dat slegs twee punte op die lyn nodig is om die grafiek te kan skets.

Aangesien hierdie ses grafieke herhaaldelik gebruik word, is dit ‘n goeie plan om seker te maak dat leerders korrekte weergawes het vir toekomstige gebruik.

Kies bruikbare punte op die grafiek om die reghoekige driehoek op te konstrueer. Ook, hoe groter die driehoek, hoe meer akkuraat die lesing.

Grafieke vanuit vergelykings

1.1 $y = -2x + 3$; $m = -2$ en $c = 3$

1.2 $y = 2x + 3$; $m = 2$ en $c = 3$

1.3 $y = \frac{1}{2}x$; $m = \frac{1}{2}$ en $c = 0$

1.4 $y = 4$; $m = 0$ en $c = 4$

In hierdie deel word gradiente van die grafiek afgelees. Dis goed as die leerders intuïtief kan begin verstaan hoe die gradiënt werk. Later bepaal ons dit uit twee punte se koördinate.

3.1 tot 3.4 Die memorandum word aan opvoeder oorgelaat.

4.1 (0 ; 1) (43 ; 0)

4.2 (0 ; –2½) (7½ ; 0)

4.3 (0 ; 0) (0 ; 0)

4.4 (0 ; −53) (54 ; 0)

4.5 (0 ; –4) (43 ; 0)

4.6 $(0 ; \frac{1}{2})$ $(-\frac{1}{2} ; 0)$

Vergelyking van 'n reguitlyn-grafiek vanuit 'n diagram

WISKUNDE

Graad 9

GETALPATRONE

GRAFIESE VOORSTELLINGS

VERGELYKINGS

STATISTIEK

WAARSKYNLIKHEIDSLEER

Module 15

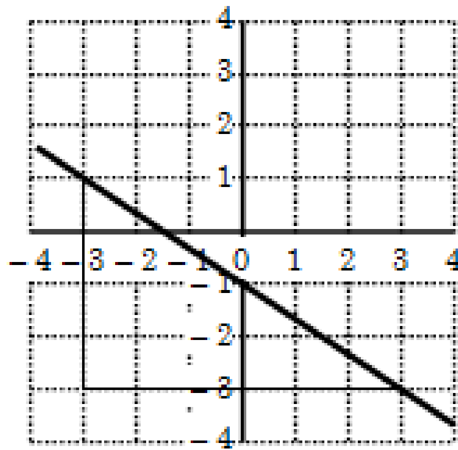
VERGELYKING VAN ‘N REGUITLYN-GRAFIEK VANUIT ‘N DIAGRAM

AKTIWITEIT 1

Om die vergelyking van ’n reguitlyn-grafiek vanuit ’n diagram te bepaal

[LU 2.5]

1. As ons die waardes van m en $c$kan uitwerk, kan ons hierdie waardes direk in die algemene vergelyking $y = mc + c$ instel om sodoende die bepalende vergelyking van die lyn te verkry. Hier is ’n voorbeeld uit die diagram.



Dis maklik om c te bepaal, aangesien dit dié waarde (positief of negatief) is waar die lyn die y-as sny. Substitueer hierdie waarde (dis –1) vir c.

Nou is die vergelyking $y = mx - 1$. Om die gradiënt (die waarde van m) te bepaal, konstrueer ons die reghoekige driehoek tussen twee geskikte punte op die lyn, waar die grafiek presies deur twee hoekpunte van die grafiekpapier gaan.

- Ons weet m is ’n breuk, t.w..

- Ons lees die aantal eenhede van die hoogte en van die basis van die driehoek om die teller en

die noemer onderskeidelik te kry.

- Ons bepaal ook die teken van m deur te kyk of die lyn opwaarts of afwaarts na regs loop.
- Nou het ons: $m = -46 = -23$ (onthou om die breuk te vereenvoudig).
- Hierdie waarde vervang nou vir m in die vergelyking: $y = -23x - 1$. Dit is die bepalende vergelyking van die lyn.

- Gebruik nou hierdie metode om die bepalende vergelykings van die agt grafieke in die eerste twee diagramme van die vorige deel uit te werk.

2 Wat van horisontale en vertikale lyne? Hulle is die maklikste!

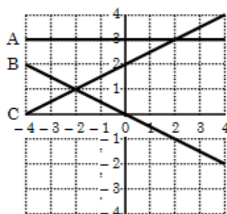
- ’n Horisontale lyn het die algemene vergelyking $y = c$. Ons moet ’n waarde vind om c mee te vervang. Hierdie waarde word van die grafiek afgelees – die y-afsnit! Substitueer vir x
- en daar het jy die bepalende vergelyking.
- Die algemene vergelyking van ’n vertikale lyn is $x = k$. Bepaal k deur van die grafiek te lees waar die lyn die x–as sny, en substitueer hierdie waarde vir k. Dit gee ons die bepalende vergelyking.

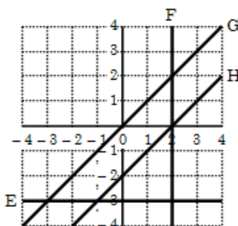
- Bepaal nou die vergelykings van die vier lyne in die laaste diagram van die vorige deel.

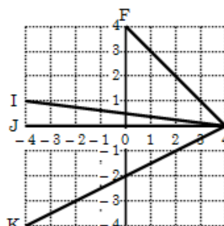
Die antwoorde is:$y = 1$ en $y = –1,5$ is die

horisontale lyne, en $x = –1$ en $x = –2{,}5$ is die twee vertikale lyne.

1. Hier is nou ’n mengsel lyne om jou vaardighede mee te toets!







4 Het jy opgelet dat die gradiënte (m) van lyne G en H dieselfde is? Waarom?

AKTIWITEIT 2

Om die gradiënt van ’n reguit lyn vanuit twee gegewe punte te bereken

[LU 2.5]

- As die koördinate van twee punte op ’n sekere reguit lyn bekend is, is dit maklik om die lyn te trek, soos jy weet. Ons kan ook die gradiënt aflei uit ’n skets. Maar dit is nie nodig om ’n skets te hê om die gradiënt te bepaal nie.
- Hier is ’n voorbeeld: Die punte (3 ; –1) en (4 ; 2) lê op ’n sekere reguit lyn.

- Eers bepaal ons die vertikale afstand tussen die punte deur die tweede punt se y-koördinaat van die eerste punt se y-koördinaat af te trek. Dit gee die teller van die gradiënt.
- Dan bereken ons die horisontale afstand tussen die twee punte deur die tweede punt se x-koördinaat van die eerste punt se x-koördinaat af te trek. Nou het ons die noemer van die gradiënt.
- Dus is die gradiënt: $m=\text{vertikaleafstandhorisontaleafstand}=-1-23-4=-3-1=3$

- As jy andersom aftrek, moet jy dit vir beide koördinate doen, soos volg:

$m=\text{vertikaleafstandhorisontaleafstand}=2--14-3=+3+1=3$, dieselfde antwoord!

1 Op blokkiespapier, stip die twee punte (3 ; –1) en (4 ; 2), en trek die lyn. Gebruik nou die grafiese metode om die gradiënt te bereken, en bevestig dat jy dieselfde antwoord kry as met die algebraïese metode.

2 Hier is vyf paar koördinate. Bereken die vyf gradiënte tussen elke paar punte.

2.1 (2 ; 6) en (4 ; 4)

2.2 (1 ; 2) en (–2 ; –1)

2.3 (0 ; 0) en (1 ; 5)

2.4 (–1 ; 4) en (5 ; 4)

2.5 (7 ; 0) en (7 ; –3)

AKTIWITEIT 3

Om twee gelyktydige vergelykings grafies op te los

[LU 2.5]

1 Los die volgende stelsels vergelykings gelyktydig op (verwys gerus terug na die hoofstuk waar jy geleer het om dit te doen).

1.1 $y = ½x + 2$ en $y = 3$

1.2 $y = x$ en $y = –3$

1.3 $y = x – 2$ en $y = –3$

1.4 $y = –x + 4$ en $y = 0$

1.5 $y = ½x – 2$ en $y = 0$

2 Verwys na die diagramme in die vorige oefening en skryf die koördinate neer van die punte waar die volgende pare lyne mekaar sny:

2.1 A en C 2.2 E en G 2.3 E en H 2.4 J en L 2.5 K en J

3 Bekyk hierdie antwoorde tesame met die vergelykings van die lyne A tot L wat jy reeds in probleem 3 bepaal het .

- Voorbeeld:

- Lyn **J** se vergelyking is $y = 0$, en vir lyn **I** behoort jy die vergelyking $y = -18x + 12$ te bepaal het. (Hierdie vergelyking kan ook as $x + 8y = 4$ geskryf word. Bevestig deur hierdie een in die standaardvorm te skryf.)
- As ons die twee vergelykings gelyktydig oplos, substitueer ons vanuit $y = 0$ in $x + 8y = 4$.

Dus, $x + 8(0) = 4 \square x + 0 = 4 \square x = 4$

Die oplossing is (4 ; 0). As dit met die grafiek vergelyk word, sien ons dat die twee lyne I en J mekaar in die punt (4 ; 0) sny.

- Bevestig dat jou antwoorde korrek is deur die koördinate bepaal deur die *algebraïese* metode te vergelyk met die koördinate bepaal deur die *grafiese* metode.

Bron:

New Scientist, 27 April 2002 vir Grafieke A en B.

Assessering

LU 2

Patrone, Funksies en AlgebraDie leerder is in staat om patrone en verwantskappe te herken, te beskryf en voor te stel, en probleme op te los deur algebraïese taal en vaardighede te gebruik.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

2.1 op verskillende maniere ‘n verskeidenheid numeriese en meetkundige patrone en verwantskappe ondersoek deur dit voor te stel en te veralgemeen, en deur die reëls onderliggend daaraan te verduidelik en te bewys (insluitend patrone in natuurlike en kulturele vorms, en patrone wat die leerder self geskep het);

2.2 voorstellings maak van verwantskappe tussen veranderlikes en dit gebruik sodat invoer– en/of uitvoerwaardes op ‘n verskeidenheid maniere bepaal kan word deur die gebruik van:

2.2.1 woordelikse beskrywings;2.2.2 vloeidiagramme;2.2.3 tabelle;2.2.4 formules en vergelykings;

2.3 wiskundige modelle saamstel wat oplossings vir probleemsituasies voorstel, beskryf en voorsien, en verantwoordelikheid toon teenoor die omgewing en die gesondheid van ander (insluitend probleme binne menseregte-, sosiale, ekonomiese, kulturele en omgewingskontekste);

2.4 vergelykings oplos deur inspeksie, deur ‘n proses van probeer–en–verbeter of algebraïese prosesse (optellings- en vermenigvuldigngsomgekeerdes, asook faktorisering) en die oplossings kontroleer deur vervanging;

2.5 grafieke op die Cartesiese vlak teken vir gegewe vergelykings (met twee veranderlikes), of die vergelykings of formules bepaal van gegewe grafieke, deur, waar nodig, van tabelle gebruik te maak;

Memorandum

Vergelykings vanuit grafieke

2.1 $m = -1$; $c = 1$ $y = -x + 1$ 2.2 $m = -1{,}5$; $c = -1{,}5$ $y = -1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$

2.3 $m = 56$; $c = -0{,}4$ $y = 56x - 0{,}4$ 2.4 $m = 2$; $c = -1$ $y = 2x - 1$

2.5 $m = -1$; $c = 0$ $y = -x$ 2.6 $m = -23$; $c = 0$ $y = -23x$

2.7 $m = 13$; $c = 0$ $y = 13x$ 2.8 $m = 23$; $c = 0$ $y = 23x$

3. A: $y = 3$ B: $y = -½\ x$ C: $y = ½x + 2$ D: $x = -1$

E: $y = -3$ F: $x = 2$ G: $y = x$ H: $y = x - 2$

I: $y = -¼\ x + ½$ J: $y = 0$ K: $y = ½\ x - 2$ L: $y = -½\ x + 4$

4. Die lyne is parallel. Op hierdie stadium, afhanklik van die klas, sou die opvoeder kon praat oor $m_1 = m_2$ (parallel), en $m_1 \times m_2 = -1$ (loodreg).

Gradiënte bereken uit twee punte

2.1 $m = 6 - 42 - 4 = 2 - 2 = -1$

2.2 $m = 2 - -11 - -2 = 2 + 11 + 2 = 33 = 1$

2.3 $m = 5 - 01 - 0 = 51 = 5$

2.4 $m = 4 - 4 - 1 - 5 = 0 - 6 = 0$

2.5 $m = 0 - -37 - 7 = 30$ ongedefinieer.

Leerders verwar dikwels die betekenis van die nul in die teller en die nul in die noemer. Beklemtoon gerus dat ons eerste die nul in die noemer moet soek. Dit beteken dat 00 outomaties ongedefinieerd is (instede van nul).

As daar tyd is, laat leerders die lyne hierbo skets en sodoende bevestig dat hul antwoorde redelik is.

1.1 (2 ; 3)

1.2 (–3 ; –3)

1.3 (–1 ; –3)

1.4 (4 ; 0)

1.5 (4 ; 0)

2.1 (2 ; 3)

2.2 (–3 ; –3)

2.3 (–1 ; –3)

2.4 (4 ; 0)

2.5 (4 ; 0)

Om eenvoudige probleme op te los deur vergelykings te vorm

WISKUNDE

Graad 9

GETALPATRONE

GRAFIESE VOORSTELLINGS

VERGELYKINGS

STATISTIEK

WAARSKYNLIKHEIDSLEER

Module 16

OM EENVOUDIGE PROBLEME OP TE LOS DEUR VERGELYKINGS TE VORM

AKTIWITEIT 1

Om eenvoudige probleme te doen deur vergelykings te vorm en op te los

[LU 2.2, 2.4]

Hoe word hierdie probleem gedoen?

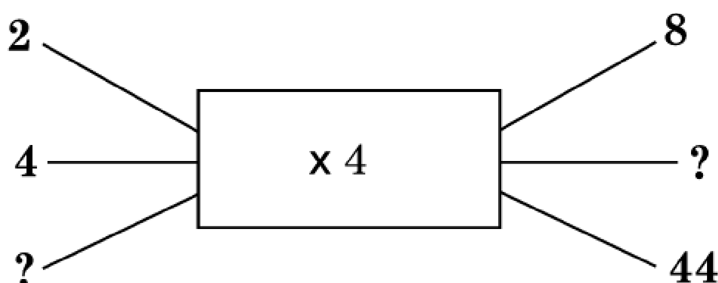
Jamie se pa is vier keer so oud as Jamie. Sy pa is 40; hoe oud is Jamie?

a) Miskien moet ons baie hard dink en ‘n paar raaiskote waag, soos: As Jamie 1 is, is sy pa 4. Nie reg nie. Wat van 2 jaar oud? Ensovoorts.

b) Maak ‘n tabel en voltooi die spasies. Help dit?

Ouderdom	1	2	3	4			
Ouderdom x 4	4	8	12		28	40	

c) Teken ‘n vloeidiagram. Help dit?



- Daar is duidelik nie veel verskil tussen die drie metodes nie – jy kan enigeen gebruik wat jou pas. Hulle is egter nie van veel waarde nie, want jy moet nog so baie raai. Vir moeiliker

probleme word hierdie metodes onmoontlik om te gebruik.
- Gelukkig is daar ‘n beter manier.
- Die beste metode om hierdie probleem aan te pak is om ‘n vergelyking vanuit die inligting te vorm. Dan los ons die vergelyking op en skryf die antwoord neer uit die oplossing van die vergelyking.
- Dis moeilik om vergelykings te vorm, maar dit word makliker met oefening.
- Vir ‘n vergelyking benodig ons ‘n gelykaanteken en ‘n veranderlike (ons gebruik dikwels x, maar dit kan enige letter wees).

Jamie se pa is vier keer so oud as Jamie. Sy pa is 40; hoe oud is Jamie?

- In die algemeen lyk die vergelyking so:
- Vier maal Jamie se ouderdom = vader se ouderdom wat 40 is.
- Die vraag vereis Jamie se ouderdom; dus: **Laat Jamie se ouderdom $x$wees**.
- Nou word die vergelyking: $4x = 40$

- Ons moet ‘n getal vind wat 40 gee as ons dit met 4 vermenigvuldig. As ons 40 deur 4 deel, is die antwoord 10. Dus moet x 10 wees, en Jamie is dus 10 jaar oud. Dis maklik om te bevestig dat dit die korrekte antwoord is.

‘n Probleem vir jou: *Leon het 48 albasters. Amy het*

slegs ‘n derde soveel as Leon; hoeveel het sy? Gebruik die vorige metode.

Sit jou antwoord op hierdie manier uiteen:

Wat stel die veranderlike voor?.

- Skryf ‘n vergelyking met hierdie veranderlike.
- Los die vergelyking op.
- Skryf die oplossing neer, m.a.w. wat die waarde van die veranderlike is.
- Skryf die antwoord op die probleem in woorde neer.

Let op dat die eerste stap en laaste stap in woorde is, en die middelste stappe, algebra.

Oefening:

Vind die antwoorde op die volgende probleme:

1. Mnr. Jacobs het R295,45 in sy sak. Mev. Jacobs het R55,30 minder as haar man in haar handsak. Wat is die bedrag in haar handsak?

2. Ek dink aan ‘n getal. Ek vermenigvuldig dit met 7 en deel die antwoord deur 3. Die resultaat is 49. Wat is die getal waaraan ek gedink het? Onthou om jou antwoord te kontroleer.

3. In Amerika koop Joanie ‘n item wat $5,75 kos. Sy bereken dat dit R41,69 is as sy dollars na rande

omskakel. Wat is die dollar–rand wisselkoers wat sy gebruik het?

AKTIWITEIT 2

Om doeltreffende metodes te ontwikkel vir moeiliker probleme

[LU 2.3, 2.4]

- Ons gaan nog woordsomme doen, maar ons gaan eers op die algebra in die oplossing konsentreer. Maak telkens seker dat jy weet wat elke stap beteken, en waarom dit gedoen word.
- Party van die volgende probleme word deur hul oplossings gevolg. Probeer eers om self by die antwoord uit te kom voor jy verder lees. Vergelyk dan jou antwoord en die manier waarop jy dit uiteensit.

1. As ek die prys van die CD wat ek gekoop het, verdriedubbel en dan R90 by die antwoord tel, kom ek uit by die prys van die R495 draagbare CD-speler wat ek dieselfde tyd gekoop het. Hoeveel het ek vir die CD betaal? Hoeveel geld het ek altesaam uitgegee?

- Oplossing:Prys van CD $\times$ 3 plus R90 $=$ prys van CD-speler

Gestel x is die CD se prys.

$x \times 3 + 90 = 495$ V*ertaal woorde in algebra*

$3x + 90 = 495$ *Vereenvoudig*

$3x = 495 – 90$ *Trek 90 af van beide kante van die* $=$

$3x = 405$ *Vereenvoudig*

$x = 405$ □ 3 *Deel deur 3 aan beide kante van die* $=$

$x = 135$ *Vereenvoudig*

Die CD het R135 gekos.

Ek het R135 $+$ R495 $=$ R630 uitgegee.

2. Mev. Williams is ‘n toesighouer in ‘n fabriek. Devon Jones is so pas aangestel as ‘n toesighouer teen ‘n weeklikse loon van R900. Sy verstaan dat as R535 van haar weeklikse loon afgetrek word, die oorblywende deel presies die hefte van Devon s’n is. Mev. Williams is bekommerd dat sy nie soveel verdien as die onervare jong man nie. Het sy rede tot kommer? Wenk: Gestel $y$is Mev. Williams se loon.

3. ‘n Sekere getal is 6 groter as ‘n ander getal. Die

som van die twee getalle is 28. Wat is die getal?

- Oplossing:

('n Getal) + (die getal – 6) = 28

Gestel x is die getal; dan is die ander getal $x - 6$

$x + (x - 6) = 28$ *Vertaal in algebra*

$x + x - 6 = 28$ *Verwyder hakies*

$2 - 6 = 28$ *Vereenvoudig*

$2x = 28 + 6$ *Tel 6 by aan elke kant*

$2x = 34$ *Vereenvoudig*

$x = 34$ □ 2 *Deel elke term deur 2*

$x = 17$ *Vereenvoudig*

Die getal is 17

Bevestig jou antwoord!

4. Alan en sy suster loop elke oggend reguit skool toe. Elke middag loop Alan weer reguit huis toe, maar sy suster loop altyd by haar vriendin se huis verby op pad huis toe; hierdie roete is twee keer so lank as Alan se roete. Tesame is die oggend- en aandroetes 1½ kilometer. Hoe ver is hulle huis van

die skool af?

Dit is belangrik om die probleem om te skakel na algebra, maar dit is ook belangrik om die algebra te kan gebruik om die vergelyking op te los en sodoende die vraag te beantwoord. Dit word nou hier aangespreek. Dit is die stappe wat ons hierbo gevolg het:

- Verwyder hakies en vereenvoudig: $x + (x–6) = 28$ $x + x – 6 = 28$
- Maak nou seker dat al die terme met die veranderlike aan die linkerkant van die = teken is, en al die terme sonder die veranderlike aan die regterkant; tel terme by of trek terme af soos nodig, en vereenvoudig: $2x–6 = 28$ $2x = 28 + 6$ $2x = 34$
- As die veranderlike ‘n getal-koëffisiënt het, deel ons beide kante daardeur, en vereenvoudig: $x = 34$ □ 2 $x = 17$

Ons gebruik hier al die vaardighede wat ons geleer het by vereenvoudiging van uitdrukkings.

Oefen hierdie vaardighede by die oplos van hierdie vergelykings:

5. (a) $5x = 35$ (b) $4x = 22$ (c) $3x – 90 = 0$ (d) $\frac{1}{2}x = 21$

6 (a) $5x + 15 = 35$ (b) $8 + 4x = 22$ (c) $3x – 90 = –60$ (d) $\frac{1}{2}x + 3 = 15$

7 (a) $5x + 15 = 2x$ (b) $8 + 4x = 22 – 2x$ (c) $3x – 90 = x$ (d) $½ x + 3 = 4 – ½ x$

8 (a) $5(x + 1) = 20$ (b) $8 + 4(x – 1) = 0$ (c) $x(x + 3) = x^2 + 6$ (d) $½ (4x + 6) = 1$

9 (a) $2(x + 1) = x + 2$ (b) $2(x + 3) = 2x + 6$ (c) $3 – 2x = –2(1 + x)$

Laat ons ‘n paar van hierdie oplossings ontleed.

Hier is sommige antwoorde:

8 (a) $x = 3$

(b) $x = –1$

(c) $x = 2$

(d) $x = –1$

- Hulle is almal aanvaarbare antwoorde.
- Hulle gee die waarde van die veranderlike (x) wat die vergelyking waar maak.

9. (a) $x = 0$ Dit is ook ‘n aanvaarbare antwoord.

(b) $2x + 6 = 2x + 6$

□ $2x – 2x = 6 – 6$

□ $0 = 0$

- Hierdie oplossing gee nie ‘n enkele waarde vir x nie.
- Maar die stelling is waar: Nul **is** gelyk aan nul.
- As ons ‘n antwoord kry wat ooglopend waar is, soos $12 = 12$ of $-3 = -3$, ens., dan weet ons dat enige waarde van die veranderlike die vergelyking waar sal maak.
- Ons gee dus die antwoord: *x kan enige waarde aanneem*.

(c) $3 - 2x = -2 - 2x$

□$-2x + 2x = -2 - 3$

□$0 = -5$

- Hierdie antwoord gee nie ‘n waarde vir $x$nie.
- Inderwaarheid is die stelling onwaar. Nul is **nie** gelyk aan negatief vyf nie.
- As ons ‘n onwaar antwoord kry, soos $5 = -5$ of $2 = -9$, ens., dan weet ons dat geen waarde van die veranderlike die vergelyking waar sal maak nie.
- Dus is die antwoord: *Daar is geen oplossing nie*.

Van nou af moet jy jou oë oophou vir hierdie spesiale gevalle (jy sal hulle nie veel sien nie) en ‘n geskikte antwoord gee

AKTIWITEIT 3

Om te bevestig dat oplossings korrek is

[LU 2.4, 2.6]

- In Wiskunde is dit dikwels moeilik om seker te wees dat jou antwoord korrek is, maar wanneer ons vergelykings oplos, is dit baie maklik: ons kontroleer net ons antwoorde! Dit moet egter baie noukeurig op ‘n spesifieke manier gedoen word.

Dis hoe: Ons kyk weer na vraag 8 hierbo.

(a) $5(x + 1) = 20$ gee die oplossing: $x = 3$

Begin met die oorspronklike vergelyking.

Kontroleer die linkerkant (LK) en regterkant (RK) *apart*.

Substitueer die oplossing vir x en vereenvoudig:

$\text{LK} = 5(x + 1) = 5[(\mathbf{3}) + 1] = 5(3 + 1) = 5(4) = 20$

Soos gewoonlik by substitusie is hakies baie handig.

$\text{RK} = 20$

Omdat die RK en die LK gelyk is, weet ons die

oplossing is korrek.

(b) $8 + 4(x - 1) = 0$ Veronderstel ons antwoord was $x = 2$. Toets die antwoord:

LK $= 8 + 4(x - 1) = 8 + 4[(\mathbf{2}) - 1] = 8 + 4(2 - 1) = 8 + 4(1) = 8 + 4 = 12$

RK $= 0$

Omdat LK $\neq$ RK weet ons dat 2 nie 'n oplossing vir die vergelyking is nie.

Natuurlik is die regte antwoord: $x = -1$. Gaan dit na:

LK $= 8 + 4(x - 1) = 8 + 4[(\mathbf{-1}) - 1] = 8 + 4(-1 - 1) = 8 + 4(-2) = 8 - 8 = 0$

LK = RK, en ons het bevestig dat $x = -1$ die korrekte oplossing is.

(c) $x(x + 3) = x^2 + 6$ oplossing: $x = 2$

LK $= x(x + 3) = (\mathbf{2})((\mathbf{2}) + 3) = 2(2 + 3) = 2(5) = 10$

RK $= x^2 + 6 = (\mathbf{2})^2 + 6 = 4 + 6 = 10$

LK = RK, dus is $x = 2$ die korrekte oplossing.

(d) $\frac{1}{2}(4x + 6) = 1$ oplossing: $x = -1$

LK $= ½ (4x + 6) = ½ (4(\mathbf{-1}) + 6) = ½ (-4 + 6) = ½ (2) = 1$

RK $= 1$

LK = RK, dus is $x = -1$ die korrekte oplossing.

Gaan nou terug na 5, 6 en 7 en kontroleer jou oplossing op dieselfde manier.

As ons terug gaan na die spesiale gevalle in 9, kan ons hulle ook kontroleer:

(a) $2(x + 1) = x + 2$ gee die oplossing: $x = 0$

LK $= 2(x + 1) = 2((\mathbf{0}) + 1) = 2(0 + 1) = 2(1) = 2$

RK $= x + 2 = (\mathbf{0}) + 2 = 2$

LK = RK, dus is $x = 0$ die korrekte oplossing.

(b) $2(x + 3) = 2x + 6$ Enige getal is 'n oplossing! Toets bv. 5; of enige ander getal.

LK $= 2(x + 3) = 2((\mathbf{5}) + 3) = 2(5 + 3) = 2(8) = 16$

RK $= 2x + 6 = 2(\mathbf{5}) + 6 = 10 + 6 = 16$

LK = RK as $x = 5$. Inderdaad, LK sal gelyk wees aan RK vir enige waarde.

(c) $3 - 2x = -2(1 + x)$ Daar is geen oplossing nie; probeer 12. Jy kan ander getalle probeer.

LK $= 3 - 2x = 3 - 2(\mathbf{12}) = 3 - 24 = -21$

RK $= -2(1 + x) = -2(1 + (\mathbf{12})) = -2(1 + 12) = -2(13) = -26$

LK $\neq$ RK en hulle sal ongelyk wees vir enige getal.

AKTIWITEIT 4

Om uitdrukkings en vergelykings te onderskei

[LU 2.1, 2.6]

- **Uitdrukkings** is kombinasies van letters (*a*, *b*, *x*, *y*, ens.), bewerkings (+, –, ×, □) en getalle (1, –5, π, ½ , ens.), asook hakies en ander tekens. Dit sluit nie gelykaantekens in nie.
- ‘n Uitdrukking is nogal soos ‘n woord of ‘n frase – dit het nie ‘n werkwoord nie.
- ‘n Paar voorbeelde: x, x^3, 5½ , 2πr, $5(ab - bc)$, $5a^3 - 3a^2 + a - 3$, 2a + b, 5a – 42a2, ens.
- ‘n Uitdrukking kan slegs *gemanipuleer* word, gewoonlik om dit te vereenvoudig. Dit kan nie opgelos word nie; dit het nie ‘n oplossing nie. Jy kan jou werk slegs kontroleer deur agteruit

te werk om te sien of jy by die begin uitkom.

- ‘n **Vergelyking** is doodgewoon twee *uitdrukkings* met ‘n gelykaanteken tussenin!
- Dit is soos ‘n sin met ‘n werkwoord; dit maak ‘n stelling. Byvoorbeeld $2x - 3 = 45$ sê dubbel ‘n sekere getal, met drie verminder, is gelyk aan 45. Dis ons werk om daardie getal te bepaal.
- Vergelykings word opgelos; hulle het oplossings wat bevestig kan word.
- Ons vereenvoudig heelwat tydens die oplos van vergelykings, maar ons doen meer – ons word toegelaat om meer te doen. Onthou dat ons terme kan bytel of aftrek, as ons dit net aan beide kante doen! Ons kan met faktore deel of vermenigvuldig, as ons dit net aan beide kante doen. Omdat ‘n uitdrukking nie twee kante het nie, kan ons hierdie bewerkings nie op uitdrukkings toepas nie. Moenie uitdrukkings en vergelykings verwar nie, en oefen totdat jy instinktief weet wat om te doen.

AKTIWITEIT 5

Om twee vergelykings gelyktydig op te los

[LU 2.4, 2.9]

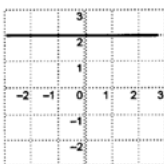


Diagram 1

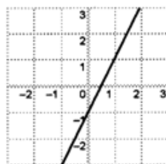


Diagram 2

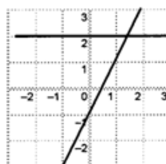


Diagram 3



1. Die lyn in diagram 1 het definisie-vergelyking $y = 2$.

Vraag: Lê die punt (1 ; 1) op die lyn?

Antwoord: Ons kan die antwoord *grafies* (deur die grafiek te bekyk) oplos. Dis duidelik dat die punt nie op die lyn lê nie, en dus is die antwoord nee.

Ons kan die antwoord *algebraïes* oplos, soos volg: Substitueer die punt (1 ; 1) vir (*x;y*) in die vergelyking. Doen LK en RK apart soos voorheen.

LK: $y = (\mathbf{1}) = 2$ RK: **2** LK $\neq$ RK – die punt (1 ; 1) lê nie op $y = 2$ nie.

Vraag: Lê die punt (–2 ; 2) op die lyn?

Grafies: Ja.

Algebraïes: LK: $y = (\mathbf{2}) = 2$ RK: **2** LK $=$ RK; Ja.

Vraag: Lê die punt (1½ ; 2) op die lyn? Bepaal die antwoord beide *grafies* en *algebraïes*.

2. Die lyn in diagram 2 word gedefinieer deur die vergelyking $y = 2x - 1$.

Vrae: Lê die punt (0 ; 0) op die lyn?

Lê die punt (1 ; 1) op $y = 2x - 1$?

Lê die punt (1½ ; 2) op die lyn?

3. In diagram 3 is dieselfde twee lyne saam op een stel asse getrek.

Bepaal grafies: Watter punt lê op beide lyne? Die antwoorde op vrae 1 en 2 hierbo sal help.

Dit is ooglopend uit diagram 3 dat die enigste punt op beide lyne (1½ ; 2) is.

- So bepaal ons dit algebraïes:

Die vergelyking $y = 2$ gee y die waarde 2. Substitueer nou hierdie waarde in $y = 2x- 1$.

As ons dan die vergelyking oplos, kry ons die waarde van x. So:

Substitueer: $(\mathbf{2}) = 2x - 1$ en los op vir x:

$2 = 2x - 1$ *x-terme na links*

$-2x + 2 = -1$ *konstante terme na regs*

$-2x = -2 - 1$ *vereenvoudig*

$-2x = -3$ *deel beide kante deur –2*

$x = -3$ □ -2 *vereenvoudig*

$x = 1\frac{1}{2}$

Dit toon die punt waar die lyne mekaar sny: $(x ; y) = (1\frac{1}{2} ; 2)$.

- In hierdie metode het ons die twee vergelykings gelyktydig opgelos om die waardes van beide veranderlikes te vind wat beide vergelykings waar maak. As 'n vergelyking slegs een veranderlike het, benodig ons slegs een vergelyking om daardie waarde van die veranderlike te vind wat die vergelyking waar maak. As ons twee veranderlikes het, benodig ons twee vergelykings om op te los vir die twee veranderlikes.

Probleme:

1 Los algebraïes op vir a en b: $2a - 3b = 0$ en $a = 6$

2 Waar sny die lyne $y = -x + 5$ en $y = -1$? Bepaal die antwoord algebraïes.

3 Lê die punt (3 ; 4) op beide lyn $y = 4$ en lyn $y = -x + 1$? Doen algebraïes.

4 Sny die lyne $y = -2$ en $y = 2$? Bepaal die antwoord algebraïes.

AKTIWITEIT 6

Om eenvoudige eksponiensiële vergelykings op te los

[LU 2.4, 2.8]

Probleme en sommige antwoorde.

1 Ek dink aan ‘n getal waarvan die kwadraat 100 is. Wat is die getal?

Die getal kan 10 wees, want $10^2 = 100$. Maar is –10 nie ook ‘n korrekte antwoord nie?

Ja, hierdie probleem het twee geldige antwoorde!

Maak ‘n vergelyking uit hierdie stelling: Gestel die getal is x.

□ $x^2 = 100$

□ $x^2 = 10^2$ of $x^2 = (-10)^2$ Die hakies is noodsaaklik – sien jy dit?

□ $x = 10$ of $x = -10$ Beide antwoorde is geldig.

2 Ek dink aan ‘n negatiewe getal waarvan die kwadraat 25 is. Wat is dit?

Laat die getal y wees

□ $y^2 = 25$

□ $y^2 = (5)^2$ of $y^2 = (-5)^2$

□ $y = 5$ of $y = -5$ is die twee oplossings verskaf deur die vergelyking.

Die probleemstelling bevestig egter dat $y = -5$ die enigste geldige antwoord is.

3 Vind daardie getal wat ‘n derdemag van 27 het.

Laat die getal x wees

□ $x^3 = 27$ □ $x^3 = 3^3$ □ $x = 3$.

Hoekom kan x nie -3 wees nie?

4 Die derdemag van ‘n sekere getal is -8. Wat is die getal?

5 Los op vir x, en bevestig jou antwoord met die LK/RK metode:

a) $x^2 = 64$

b) $x^2 = 36$

c) $x^2 = -100$

d) $x^2 - 49 = 0$

e) $x^2 = 12{,}25$

f) $3x^2 = 12$

g) $2x^2 - 10{,}58 = 0$

6 Los op vir a en kontroleer jou antwoord:

a) $a^3 = 64$

b) $a^3 + 1 = 0$

c) $2a^2 = 16$

d) $a^4 = 81$

Versamel inligting om algemene vrae te beantwoord

WISKUNDE

Graad 9

GETALPATRONE

GRAFIESE VOORSTELLINGS

VERGELYKINGS

STATISTIEK

WAARSKYNLIKHEIDSLEER

Module 17

VERSAMEL INLIGTING OM ALGEMENE VRAE TE BEANTWOORD

Vir wie is statistieke nou eintlik belangrik?

AKTIWITEIT 4.1

Om te besef dat ons inligting moet insamel om algemene vrae te kan beantwoord

LU 5.1]

Dis dikwels noodsaaklik om inligting oor mense te hê. Byvoorbeeld, as die regering moet besluit hoeveel nuwe skole waar gebou moet word, moet

hulle weet hoeveel kinders daar in elke streek van die land woon, veral kinders wat nog nie skoolgaan nie. Dieselfde geld vir besluite oor nuwe klinieke, hospitale, ensovoorts.

Mense wat ’n nuwe produk wil bemark, wil graag weet hoeveel mense sou belangstel om die produk te koop. Om ’n antwoord te kry, moet hulle vrae vra en statistieke bekom.

Statistici is die professionele mense wat hierdie werk doen. Hulle sien toe dat die inligting wat ingesamel word, die beste moontlik is (ons sal later meer hieroor leer). Dan bestudeer en bewerk hulle die data sodat betroubare besluite daarop gebaseer kan word.

Die regering hou ’n *sensus* op ’n gereelde grondslag om inligting oor die land se bevolking te bekom. Dan word heelwat ekstra mense in diens geneem om die besonderhede van elke persoon in die land in te samel. Dit neem dan nog ’n paar jaar om al die inligting te organiseer en te publiseer. Die inligting word dan vrygestel vir gebruik deur diegene wat beplanning op grond van betroubare syfers moet doen.

Die grondslag van die statistiek is syfers, en dié word verkry deur vrae. Kom ons doen gou ’n bietjie navorsing.

Belangrik: Hou al die inligting waaraan ons werk in

hierdie deel – ons gaan dit later weer gebruik. Soos jy meer leer van statistiek, sal jy meer inligting uit die data kan aflei.

1. Dink aan jou hele familie – ouers, grootouers, broers en susters, tantes, ooms – almal. Tel hoeveel familielede jy het. Hoeveel van hulle het selfone? Hoeveel van hulle se selfone is al gesteel? Hoeveel het al hulle selfone verloor? Vul die inligting in op die tabel, en in die laaste reël die totale vir die hele klas.

	Aantal mense	Besit selfoon	Selfoon al gesteel	Selfoon al verloor
Leerder				
Klas				

2 Werk drie of vier saam in groepies om die volgende tabel te voltooi. Elkeen skryf neer aan watter twee sportsoorte hy/sy besonder graag sou wou deelneem. Dit hoef nie skoolsport te wees nie. Vir elke sport vul jy in of jy dit alreeds speel, of jy in ’n span speel en of jy dit nie kan speel nie weens ’n gebrek aan fasiliteite en toerusting of omdat daar nie ’n afrigter is nie.

Naam	....									
Sport	1:					2:				
	Neem deel	In 'n span	Geen afrigter	Geen toerusting	Geen fasiliteite	Neem deel	In 'n span	Geen afrigter	Geen toerusting	Geen fasiliteite
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

3 Hier is nog ’n paar van die soort vrae waarmee statistici hulle besig hou:

3.1 Hoe verteenwoordigend is die leerders in ’n skool van die bevolking van die streek waar die skool geleë is?

3.2 Wat is die houding van mense wat in ’n sekere area woon jeens die verklaring van ’n deel van die area as ’n natuurbewaringsomgewing?

3.3 Hoeveel mense in ’n sekere provinsie is HIV-positief?

3.4 Hoe vergelyk die gevangenisbevolking van twee gegewe provinsies?

3.5 Suid-Afrika het heelwat vrouens in die parlement. Hoe vergelyk dit met ander demokratiese lande?

3.6 Hoe lyk die verspreiding van rykdom in die wêreld – m.a.w. watter breuk van die wêreldbevolking besit, sê, die helfte van die wêreldrykdom?

AKTIWITEIT 2

Om verskeie metodes van data-insameling te verken

[LU 2.2, 5.2]

Dit was maklik om inligting te bekom in ons navorsing oor die selfone en sport-deelname. Maar partykeer moet ’n mens effens harder werk.

1 As iets *getel* moet word (byvoorbeeld, die aantal linkshandiges in die skool), is die maklikste om ’n tabel met merkies te maak.

- Hieronder is ’n tabel vir inligting oor die ouderdom en geslag (manlik of vroulik) van jou en jou broers en susters. Vir elke suster maak jy ’n merkie in die “susters”-ry onder die gepaste ouderdom. Vir elke broer doen jy dieselfde in die “broers”-ry. Moenie van jouself vergeet nie! Elke leerder in die klas doen dit ook. Elke keer as jy by die vyfde merkie kom, plaas jy dit oor die vorige vier sodat jy hulle makliker kan tel om die totale aan die einde te verkry. Die eerste tabel is vol denkbeeldige inligting – gebruik die tweede vir jou klas.

Ouderdom	<1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	>13
Susters	////////	//////	//////////	/////////	///	///////	/////////	////	//////	//	//////	/////	/////////	///////	//////////
Broers	//////	///	/////////	///////	//	////	/////////	/////	//////	////////	//////	///////	////	///////	//////
Totaal susters	8	6	10	9	3	7	9	4	6	2	6	5	9	7	10
Totaal broers	6	3	9	7	2	4	9	5	6	8	6	7	4	7	6

Ouderdom	<1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	>24
Susters																										
Broers																										
Totaal susters																										
Totaal broers																										

- Die getalle in die twee onderste rye is die *frekwensie* van voorkoms van verskillende ouderdomme. ’n Frekwensietabel gee die *frekwensieverspreiding* van die eienskap onder bespreking.
- Dit is duidelik dat die tabelle in die selfoon- en sportoefeninge ook frekwensietabelle is.

2 *Vraelyste* word gebruik vir die insameling van inligting wat te kompleks is vir merkies en frekwensietabelle.

- Dalk word jy in ’n winkelsentrum voorgekeer vir ’n *onderhoud* oor jou tandepasta-en flosgewoontes.

- Hier is die soort vrae wat dalk op die vraelys mag voorkom:

- Gebruik jy tandepasta nooit, een keer, twee keer of meer as twee keer per dag?
- Koop jy ’n nuwe tandeborsel elke week, elke maand of elke jaar?
- Flos jy jou tande gereeld of slegs wanneer daar kos tussen jou tande vassit?
- Verkies jy gegeurde tandepasta?
- Hou jy van gekleurde tandepasta?
- Gaan jy gereeld tandarts toe, of net in noodgevalle?
- Hoeveel stopsels het jy?
- Is daar al van jou tande getrek?

- Bespreek in klein groepies die moontlike redes waarom iemand hierdie inligting sou wou hê.

- Baie vraelyste kom voor in koerante en tydskrifte. Partykeer is dit net pret, en mens kan dit ontleed en die antwoorde dadelik lees. Maar party mag ernstig wees en moet teruggepos word. Dikwels word mense

aangemoedig om dit terug te stuur deur ’n geskenk of ’n prys aan te bied. Baie mense hou nie daarvan om vraelyste in te vul nie, en het aanmoediging nodig, maar ander vind dit groot pret en gee nie om om behulpsaam te wees nie.

3 Eksperimente is nog ’n manier om inligting te bekom.

- Mediese navorsers gebruik dikwels hierdie metode. Hulle het dalk ’n nuwe behandeling ontwikkel en wil nou graag uitvind of dit beter is as die vorige behandeling, dieselfde, of slegter. As hulle weet dat dit veilig is (partykeer is hulle nie eers seker hieroor nie) kan hulle toestemming vra by die toepaslike regeringsdepartement om dokters toe te laat om die nuwe medisyne voor te skryf. Die dokters vul dan ’n vraelys in oor die effek op hulle pasiënte vir die navorsers om te bestudeer.

4 Dis nie altyd nodig om mense te vra vir inligting nie; baie vrae kan beantwoord word deur net self ’n bietjie navorsing te doen. Byvoorbeeld:

4.1 Is die Engelse storieboeke in die biblioteek langer as die storieboeke in ander tale? Om hierdie vraag te beantwoord, kyk jy na die laaste bladsy van elke boek, en maak ’n paar somme.

4.2 As jy ’n storie vir ’n tydskrif wil skryf, hoe lank

moet die storie wees? Kyk na verskeie uitgawes van die betrokke tydskrif en tel die woorde in hulle kortverhale. As jy dan die gemiddelde lengte van hulle kortverhale kan bereken (jy sal later meer hiervan leer), dan weet jy hoe lank joune moet wees.

5 Hoe gewild is jou gunsteling-akteurs? Tik hul name in op ’n internet-soekprogram en tel hoeveel “*hits*” (artikels met die naam in) jy kry.

6 Jy kan ’n eksperiment saam met jou klasmaats doen. Lees die beskrywing hieronder en beplan versigtig hoe om dit uit te voer, wie wat gaan doen en hoe jy die resultate gaan aanteken. As alles beplan is, gaan voort met die eksperiment.

EKSPERIMENT

- Jy benodig twee soorte gaskoeldrank – mense sê party kan ’n mens nie onderskei nie; dit sal ook goed wees as hulle ook dieselfde lyk. Blinddoek die persoon wat gaan proe (die proewer). Almal behalwe die eksperimenteerder en die assistent moet ’n beurt kry om te proe.

- Iemand (die eksperimenteerder) skink ’n bietjie van elke koeldrank waar mens dit nie kan sien nie. Gebruik bekertjies van verskillende kleure. Slegs die eksperimenteerder weet watter koeldrank in watter bekertjie is, en dit word

ingevul op ’n geheime lys. As die proewer besluit het watter koeldrank dit is, maak die assistent ’n aantekening van die kleur van die bekertjie.

- Die eksperimenteerder bestudeer die antwoord, en besluit op grond van die beker se kleur of die proewer reg of verkeerd is. Nadat almal geproe het, sal dit dalk moontlik wees om te besluit of die koeldranke regtig dieselfde smaak!

- Assesseer die rol in die eksperiment:

- As daar tyd is, kan die klas aan nog ’n vraag dink wat deur ’n eksperiment beantwoord kan word. Ontwerp dan ’n geskikte eksperiment en bekom ’n antwoord.

AKTIWITEIT 3

Om die geldigheid van die inligtingsinsamelingsproses te ondersoek

[LU 5.2]

- Voor ons kan voortgaan, moet ons eers nog ’n baie belangrike deel van inligtingsinsameling bestudeer. Doen die volgende oefening in groepies van vier of vyf leerders.

- Kom ons sê ons wil graag weet hoeveel mense in Suid-Afrika na die nuus op TV kyk.

- Jy kan dalk vir elke persoon in die land vra en die antwoorde tel om so ’n baie betroubare antwoord te kry – as hulle die waarheid praat, natuurlik.
- Dis duidelik dat dit ’n lang en duur proses sou wees. In die *sensus* probeer die regering juis om ’n paar belangrike vrae van elke persoon in die land te vra. Dit kos ’n klomp geld, en selfs dan is hulle inligting nie heeltemal akkuraat nie.
- Dalk hoef ons nie almal te vra nie – ons kan ’n klompie vra en so probeer uitvind. As daar 45 miljoen mense in die land is, en ons vra 45 mense of hulle na die nuus kyk, en 35 sê ja, dan beteken dit dalk dat 35 miljoen mense ook nuus kyk.

- Die statistici noem hierdie kleiner groep mense ’n *steekproef*. As die hele bevolking waarin ons belangstel te groot is, kan ons ’n kleiner aantal ondersoek d.m.v. *steekproefneming* en daarvandaan vermenigvuldig om die antwoord te bereken.
- Veronderstel die leerders in jou klas moet die inligting vir hierdie vraag insamel. Julle besluit om beurte te maak om elke weeksdag ’n uur by ’n vulstasie te staan en motoriste te vra of hulle na die nuus kyk. ’n Goeie plan – dis onderdak, en die motoriste moet in elk geval ’n paar minute wag; hulle sal sekerlik nie omgee om te antwoord as jy mooi vra met ’n glimlag nie?
- Veronderstel nou dit werk briljant. Twee weke

lank het julle die vulstasies in julle omgewing besoek en ’n klomp antwoorde verkry. Julle was baie oulik – julle het getel hoeveel julle gevra het, hoeveel nie wou antwoord nie, en hoeveel JA gesê het, en hoeveel NEE gesê het.

- Nou moet jy hierdie syfers omskakel in ’n akkurate beraming van hoeveel mense uit die totale bevolking na TV nuus kyk.

- Bespreek in jou groep presies hoe jy dit sou doen.
- Bespreek ook hoe akkuraat die antwoord kan wees – as julle dalk op een of ander wonderbaarlike wyse elke persoon in die land se antwoord kon weet, sou dit dieselfde as julle beraming wees? Skryf ’n bondige maar duidelike opsomming van al die gevolgtrekkings wat die groep maak.

Assessering

LU 2
Patrone, Funksies en AlgebraDie leerder is in staat om patrone en verwantskappe te herken, te beskryf

en voor te stel, en probleme op te los deur algebraïese taal en vaardighede te gebruik.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

2.1 op verskillende maniere ‘n verskeidenheid numeriese en meetkundige patrone en verwantskappe ondersoek deur dit voor te stel en te veralgemeen, en deur die reëls onderliggend daaraan te verduidelik en te bewys (insluitend patrone in natuurlike en kulturele vorms, en patrone wat die leerder self geskep het);

2.2 voorstellings maak van verwantskappe tussen veranderlikes en dit gebruik sodat invoer– en/of uitvoerwaardes op ‘n verskeidenheid maniere bepaal kan word deur die gebruik van:

2.2.1 woordelikse beskrywings;2.2.2 vloeidiagramme;2.2.3 tabelle;2.2.4 formules en vergelykings;

2.3 wiskundige modelle saamstel wat oplossings vir probleemsituasies voorstel, beskryf en voorsien, en verantwoordelikheid toon teenoor die omgewing en die gesondheid van ander (insluitend probleme binne menseregte-, sosiale, ekonomiese, kulturele en omgewingskontekste);

2.4 vergelykings oplos deur inspeksie, deur ‘n proses van probeer–en–verbeter of algebraïese prosesse (optellings- en vermenigvuldigngsomgekeerdes, asook faktorisering) en die oplossings kontroleer deur vervanging;

2.5 grafieke op die Cartesiese vlak teken vir gegewe vergelykings (met twee veranderlikes), of die vergelykings of formules bepaal van gegewe

grafieke, deur, waar nodig, van tabelle gebruik te maak;

2.6 die ekwivalensie van verskillende beskrywings van dieselfde verwantskap of reël bepaal, ontleed en interpreteer, wat soos volg voorgestel word:

2.6.1 woordeliks;2.6.2 in vloeidiagramme;2.6.3 in tabelle;2.6.4 deur vergelykings of uitdrukkings;

- deur grafieke in die Cartesiese vlak

sodat die nuttigste voorstellingvir ‘n gegewe situasie gekies kan word.

LU 5

DatahanteringDie leerder is in staat om data te versamel, op te som, voor te stel en krities te ontleed om gevolgtrekkings en voorspellings te maak en om toevallige variasie te interpreteer en te bepaal.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

5.1 vrae stel oor menseregte-, sosiale, politieke, omgewings– en ekonomiese sake in Suid–Afrika;

Om data te ontleed vir betekenisvolle patrone en maatstawwe

WISKUNDE

Graad 9

GETALPATRONE

GRAFIESE VOORSTELLINGS

VERGELYKINGS

STATISTIEK

WAARSKYNLIKHEIDSLEER

Module 18

OM DATA TE ONTLEED VIR BETEKENISVOLLE PATRONE EN MAATSTAWWE

AKTIWITEIT 1

Om data te ontleed vir betekenisvolle patrone en maatstawwe

[LU 5.3]

- Nou gaan ons inligting insamel oor die lengtes van leerders in die klas. Maak ’n maatband langs die deur vas sodat dit perfek vertikaal is.

As ’n maatband nie beskikbaar is nie, maak gerus ’n ander plan; dalk kan jy elke sentimeter ’n merkie maak met behulp van ’n liniaal.

- Elke leerder trek haar skoene uit en staan met haar hakskene en rug styf teen die muur. Iemand wat lank genoeg is, hou ’n liniaal of stuk karton plat op haar kop om af te lees presies hoe lank sy is. Die beste is om die lesing in sentimeter te neem. Skryf die waarde op haar hand, of op ’n stukkie papier.

Die eerste berekening doen ons op ’n interessante wyse. As al die leerlinge gemeet is, staan almal **in ’n ry volgens lengte.**

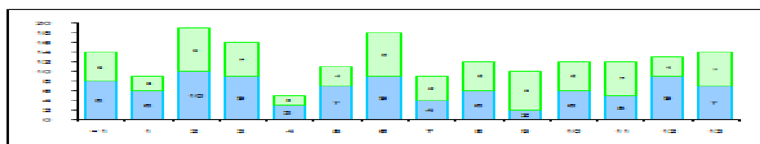
- Vanuit hierdie ry kry ons die **eerste** maatstaf van die gemiddelde van die leerders se lengtes. Skryf die lengte neer van die persoon wat presies in die middel van die ry is (ewe ver van die begin as van die einde). Hierdie waarde is die *mediaan*. Daar is net soveel korter as langer leerders as sy. Let op: As daar ’n ewe getal leerders is, sal daar natuurlik nie ’n middelste wees nie. In daardie geval neem ons die twee middelstes, tel hulle lengtes bymekaar en deel die antwoord deur twee.

- Skryf die mediaanlengte van die klas neer. Werk die mediaan vir seuns en meisies apart uit as daar beide seuns en meisies in die klas is.

Nou moet daar ’n frekwensietabel vir die lengtes opgestel word – gebruik telmerkies om te tel hoeveel van elke lengte daar in die klas is.

Gebruik die tabel met ouderdomme van susters en broers en werk die *mediaanouderdomme* apart uit.

Jou tabel gaan dalk groot wees, maar hier is ’n kleiner voorbeeld:



- Stem jy saam dat die mediaanlengte vir hierdie groep 162 cm is?

- Bestudeer die getalle in die laaste ry (dis die frekwensies van die verskillende lengtes). Dit is duidelik dat 164 cm die lengte is wat die meeste voorkom, want daar is ses leerders wat 164 cm lank is. Hierdie waarde word die *modus* genoem. Ons kan dit sien as die mees “gewilde” lengte.

- Vervolgens bereken ons dié waarde wat gewoonlik as die gemiddelde bekend staan. Die regte naam is die *rekenkundige gemiddelde*. Jy weet dalk alreeds hoe om dit te bereken: Tel al die waardes bymekaar en deel deur die aantal waardes. Vir die bostaande tabel deel jy 6 156 deur 38 om ’n rekenkundige gemiddelde lengte

van 162 cm vir die klas te kry.

Ons kan die waardes tabelleer:

Mediaan	162 cm
Modus	164 cm
Gemiddelde	162 cm

Gebruik die tabel met ouderdomme van susters en broers en werk die modus en gemiddelde vir susters en broers apart uit. Maak ’n tabel daarvan soos langsaan.

- Ons noem hierdie drie waardes (modus, mediaan en rekenkundige gemiddelde) saam die *middelwaardes*. Hulle is al drie verskillende soorte **gemiddeldes**. Daarom moet ons versigtig wees met die woord *gemiddelde*, en seker maak dat die rekenkundige gemiddelde bedoel word en nie dalk die modus of mediaan nie.

- Doen nou dieselfde berekeninge vir die lengtes van jou klas.

Hier is nog ’n klas se hoogtes in ’n frekwensietabel.

cm	158	159	160	161	162	163	164	165	166
Totaal	1	4	6	6	5	4	7	4	1

- Bereken die drie middelwaardes vir hierdie klas ook.
- Vergelyk die lengtes van die leerders in die twee klasse en skryf 'n opsomming van die verskille en ooreenkomste.

AKTIWITEIT 2

Om meer inligting uit data te onttrek

[LU 5.3]

Mediaan	162 cm
Modus	164 cm
Gemiddelde	162 cm

In die vorige tabel het die leerlinge verkillende lengtes as vantevore, maar die middelwaardes is presies dieselfde.

Ons kan nog meer sê van die data deur maatstawwe van verspreiding te gebruik.

- Eerstens bereken ons die *variasiebreedte*, wat die verskil is tussen die hoogste en die laagste waarde. Trek vir beide klasse die laagste waarde van die hoogste waarde af. Dis duidelik dat die eerste klas ’n variasiebreedte van 13 cm het, en die tweede 8 cm.
- Die tweede maatstaf van verspreiding is die *gemiddelde afwyking*. Dit bereken ons deur eers te bepaal hoe ver elke waarde afwyk (of verskil) van die *rekenkundige gemiddelde* (wat ons alreeds bereken het). Daarna bereken ons die rekenkundige gemiddelde van hierdie afwykings, om die gemiddelde afwyking te gee.

Hier is ’n tabel van al die lengtes van die tweede klas, met die afwykings in die tweede ry:

158	159	159	159	159	160	160	160	160	160	160	161	161	161	161	161	161	162	162
4	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0

162	162	162	163	163	163	163	164	164	164	164	164	164	164	165	165	165	165	166
0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4

- Die som van al hierdie afwykings is 68. Gedeel deur 38 gee dit 1,79 akkuraat tot twee desimale.

- Doen dieselfde berekening vir die ander klas.
- Bereken nou die twee maatstawwe van verspreiding vir jou eie klas.

Maatstawwe van verspreiding is handig wanneer twee stelle waardes, soos die lengtes van twee klasse se leerders, vergelyk moet word. Daar is nog ander maatstawwe van verspreiding, maar ons leer nie hoe om hulle te gebruik nie.

- Jy het nou al heelwat geleer – tabellering van gegewens, berekening van beskrywende maatstawwe en die maak van sekere afleidings oor die data.

AKTIWITEIT 3

Om nuwe vaardighede te gebruik om toetspunte te ondersoek en te vergelyk

[LU 5.3]

- Vergelyk die punte wat twee groepe leerders vir dieselfde toets behaal het – sien onderstaande tabel. Jy moet al die vaardighede wat jy al in hierdie leereenheid bemeester het, gebruik om vas te stel of die een groep beter gevaar het as die ander een. Dis nie ’n

eenvoudige vraag nie, en jy sal nie die antwoord kry sonder om hard te dink en versigtig te werk nie.

Groep A	82	78	57	91	29	80	85	49	82	67	99	68	83	12	87	86	38	81	58	79
Groep B	72	82	74	84	81	84	76	12	2	71	70	93	13	90	80	73	91	70	99	88

AKTIWITEIT 4

Om inligting voor te stel op maniere wat die betekenis goed na vore bring

[LU 2.2, 2.6, 5.4]

Toe ons met grafieke gewerk het, het jy gesien hoe ’n grafiek ’n goeie prentjie van die betekenis van data kan skets.

Ons gaan nou ’n bietjie meer sien van verskillende maniere om *inligting grafies voor te stel*. Dit is hoe ’n mens inligting betekenis kan gee sonder om te veel ingewikkelde berekeninge te moet doen.

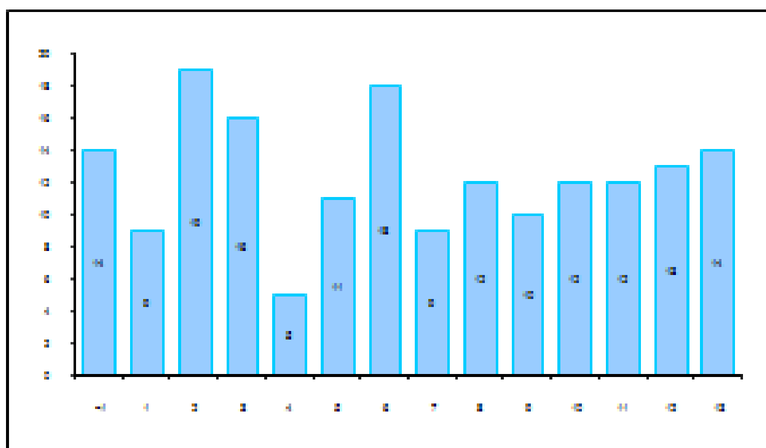
1 Lyngrafieke

- Ons het alreeds heelwat tyd bestee aan die skets van reguitlyngrafieke. Toe het ons punte vanuit ’n tabel gestip en met ’n mooi reguit lyn verbind.
- Dit is egter nie altyd geoorloof om twee punte met ’n reguit lyn te verbind nie. Dink net terug aan die stapsgewyse grafieke.
- Partykeer lê die punte nie in ’n reguit lyn nie en as hulle verbind word, vorm hulle ’n skewe lyn. Dit word dikwels ’n gebroke-lyn grafiek genoem. Maar, is dit altyd korrek om die punte te verbind?

Hier is weer ’n gedeelte van die frekwensietabel van ouderdomme van broers en susters.

Ouderdom	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Totaal susters	8	6	10	9	3	7	9	4	6	2	6	5	9	7
Totaal broers	6	3	9	7	2	4	9	5	6	8	6	7	4	7
Totaal	14	9	19	16	5	11	18	9	12	10	12	12	13	14

Die beste manier om hierdie gegewens grafies voor stel is, ’n staafgrafiek.

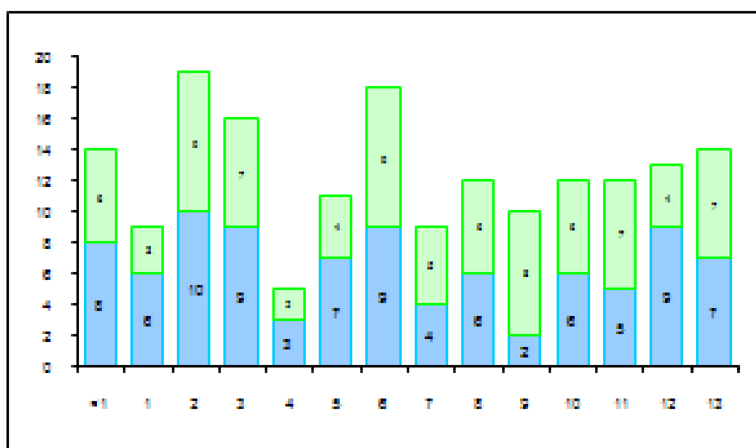


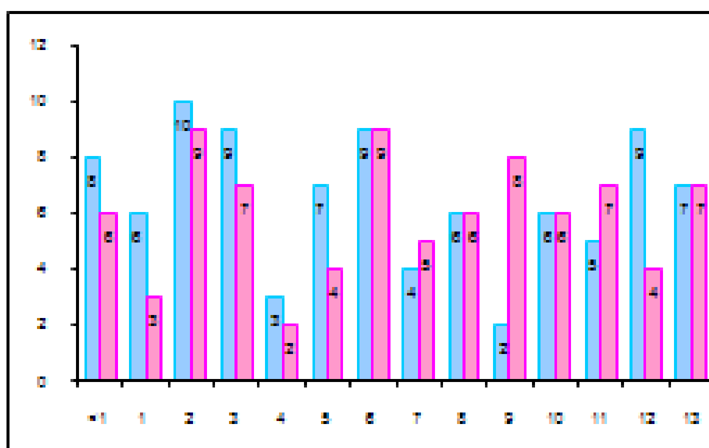
2 Staafgrafieke

Hierdie staafgrafiek is baie duideliker as die grafiek met die punte. Die horisontale as wys die ouderdomme, en die hoogte van die stawe wys die frekwensies.

Let asseblief op dat al die stawe dieselfde breedte het – anders word ons dalk onder die valse indruk gebring dat sekere feite meer belangrik is as die res.

In die volgende staafgrafiek maak ons onderskeid tussen die seuns en die meisies, maar omdat die stawe gestapel is, wys die hoogte van die staaf steeds die totaal.



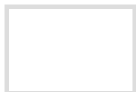


Daar is verskeie manier om staafgrafieke te teken; hier is nog een met die stawe vir seuns en meisies langs mekaar. Skryf ’n paar sinne oor hierdie drie grafieke, en sê watter een (na jou mening) die inligting die beste weergee.

3 Histogramme

- Die uitgewers van ’n sekere tienertydskrif wou uitvind hoe oud hulle lesers is. Hulle het die ouderdomme gevra van elkeen wat die tydskrif by ’n inkopiesentrumkiosk gekoop het. Die ouderdomme waaruit die mense kon kies, was soos volg:
- Onder 5
- Van 5 tot 8, maar nog nie 8 nie
- 8 jaar oud
- 9 jaar oud
- Ouer as 9 maar jonger as 10 jaar en 6 maande
- Ouer as 10½ jaar maar nog nie 11 nie
- Ouer as 11 jaar maar nog nie 11½ nie
- Ouer as 11½ jaar maar nog nie 12 nie
- Ouer as 12 jaar maar nog nie 12½ nie
- Ouer as 12½ jaar maar nog nie 13 nie
- Ouer as 13 jaar maar nog nie 13½ nie
- Ouer as 13½ jaar maar nog nie 14 nie
- Ouer as 14 jaar maar nog nie 15 nie
- Tussen 15 en 16
- Tussen 16 en 18
- Tussen 18 en 20
- Onder 25
- 25 tot 60

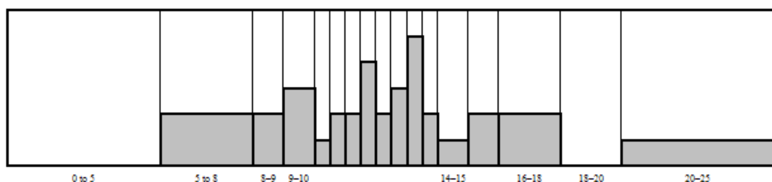
Hier is die eerste deel van die tabel wat uit die data saamgestel is:



Ouderdom																	
Frekwensie	0	2	2	3	1	2	2	4	2	3	5	2	1	2	2	0	1

Hieronder is die *histogram* van die gegewens in die tabel. ’n Histogram lyk nogal soos ’n staafgrafiek, maar daar is nie spasies tussen die stawe nie, en die wydte van die stawe hang af van die groottes van die *intervalle*.

- Die tabel wys dat die ouderdomsintervalle verskil; die eerste interval is vyf jaar, die volgende drie jaar, ensovoorts. Vul die ontbrekende intervalle op die grafiek self in.



- Die inligting oor die lengtes van leerders het slegs 1cm-intervalle gehad – en dus was ’n staafgrafiek ’n goeie keuse.
- Dis maklik om te fouteer en ’n staafgrafiek te teken waar dit ’n histogram moes wees omdat die intervalle verskil – maak seker dat jy die intervalgroottes elke keer nagaan.

4 Sirkelsektordiagramme

- Die oppervlaktes van die sektore hou verband

met waardes wat daardeur voorgestel word.

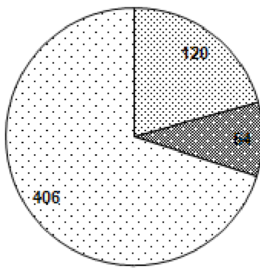
Hier volg ’n paar voorbeelde.

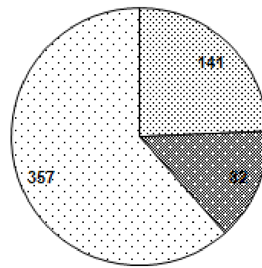
- In die tabel is inligting oor die eetgewoontes van leerders by ’n sekere hoërskool. Hulle het ’n kort vraelys voltooi, en die tabel is daaruit saamgestel.

Geen ontbyt tuis	Ontbyt tuis	Het ontbyt skool toe gebring	Middagete tuis	Het middagete skool toe gebring	Het middagete by die snoepie gekoop	Ekstra eetgoed skool toe gebring
82	357	141	54	406	120	227

- Die skool het 580 leerders. Kan jy die waarde bevestig uit die getalle in die tabel?

- Een sektordiagram is saamgestel uit die ontbytinligting, en die ander een uit die middagetesyfers. Besluit watter een is eerste, en vul dan die beskrywings op die regte plekke in.





- Dis duidelik dat die sektorgroottes verskil. Die groottes is in verhouding met die getal leerders wat elke sektor voorstel. Die regte grootte en verhouding word vasgestel deur die hoekgrootte op die punt van die sektor te bereken. Byvoorbeeld, 82 □ 580 $\times$ 360 $=$ 51°, afgerond. Dit is die hoek aan die punt van die sektor verteenwoordigend van die leerlinge wat nie ontbyt eet voor hulle skool toe kom nie. Die formule is: hoekgrootte $=$ waarde □ totaal van waardes $\times$ 360. Bereken die hoekgroottes van al die ander sektore, en bevestig deur meting dat die sektore die regte groottes is!
- Dis vanselfsprekend dat die som van al die hoeke 360° moet wees.

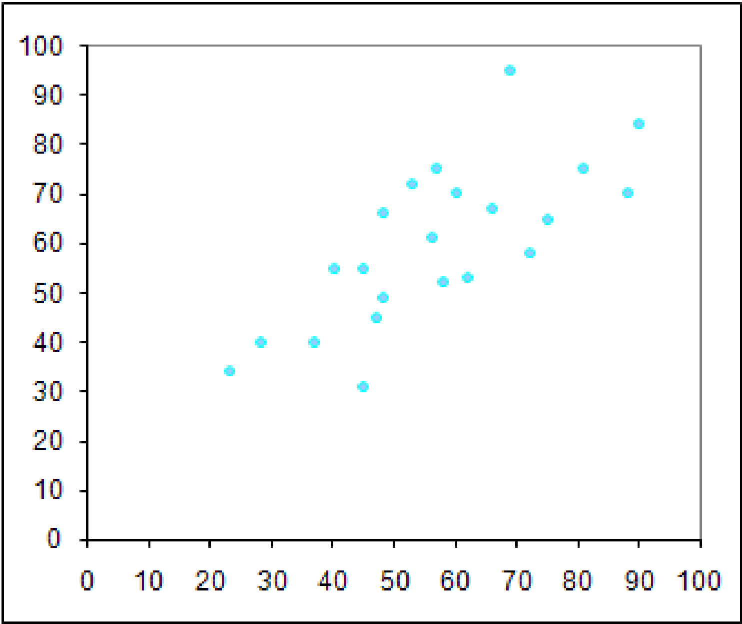
5 Puntediagramme

- Hulle is aantreklike grafieke, bestaande slegs uit die gestipte punte. Dis ’n skakel tussen twee stelle gegewens, op een grafiek, wat vergelykings tussen die twee vergemaklik. Hier is ’n illustrasie.

Die toetspunte in Skeinat en Wiskunde van ’n groep van 22 leerders word in hierdie tabel weergegee.

Leerder	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
Skeinat	75	45	28	66	58	81	23	69	60	48	72	37	47	90	57	88	45	56	62	40	53	48
Wiskunde	65	31	40	67	52	75	34	95	70	66	58	40	45	84	75	70	55	61	53	55	72	49

Die puntediagram van die punte:



Elke leerling word voorgestel deur ’n punt met koördinate (Skeinat-punt ; Wiskunde-punt). Leerder

A is (75;65). Soek daardie punt. Leerder B is (45;31), ens. Die grafiekblokkies is uitgelaat om die grafiek duideliker te maak.

As die punte ’n patroon vorm, soos dié, ongeveer vanaf die hoek onder links na bo regs, beteken dit dat daar ’n verband is tussen die leerders se punte vir die twee vakke.

- Daardie leerders wat nie dié neiging toon nie, staan duidelik uit op die grafiek. Sien die twee punte in die sirkels. Byvoorbeeld, die punt (69;95) van leerder H is effens hoër as die ander. Dus is sy punte vir Wiskunde beter as vir Skeinat, maar leerder B (45;31) doen heelwat beter in Skeinat as in Wiskunde. As almal presies dieselfde punte behaal in Skeinat en in Wiskunde, sou daar ’n baie duidelike patroon uitkom. Wat dink jy sou die patroon wees?

Assessering

LU 2
Patrone, Funksies en AlgebraDie leerder is in staat

om patrone en verwantskappe te herken, te beskryf en voor te stel, en probleme op te los deur algebraïese taal en vaardighede te gebruik.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

2.1 op verskillende maniere ‘n verskeidenheid numeriese en meetkundige patrone en verwantskappe ondersoek deur dit voor te stel en te veralgemeen, en deur die reëls onderliggend daaraan te verduidelik en te bewys (insluitend patrone in natuurlike en kulturele vorms, en patrone wat die leerder self geskep het);

2.2 voorstellings maak van verwantskappe tussen veranderlikes en dit gebruik sodat invoer– en/of uitvoerwaardes op ‘n verskeidenheid maniere bepaal kan word deur die gebruik van:

2.2.1 woordelikse beskrywings;2.2.2 vloeidiagramme;2.2.3 tabelle;2.2.4 formules en vergelykings;

2.3 wiskundige modelle saamstel wat oplossings vir probleemsituasies voorstel, beskryf en voorsien, en verantwoordelikheid toon teenoor die omgewing en die gesondheid van ander (insluitend probleme binne menseregte-, sosiale, ekonomiese, kulturele en omgewingskontekste);

2.4 vergelykings oplos deur inspeksie, deur ‘n proses van probeer–en–verbeter of algebraïese prosesse (optellings- en vermenigvuldigngsomgekeerdes, asook faktorisering) en die oplossings kontroleer deur vervanging;

2.5 grafieke op die Cartesiese vlak teken vir gegewe vergelykings (met twee veranderlikes), of die

vergelykings of formules bepaal van gegewe grafieke, deur, waar nodig, van tabelle gebruik te maak;

2.6 die ekwivalensie van verskillende beskrywings van dieselfde verwantskap of reëel bepaal, ontleed en interpreteer, wat soos volg voorgestel word:

2.6.1 woordeliks;2.6.2 in vloeidiagramme;2.6.3 in tabelle;2.6.4 deur vergelykings of uitdrukkings;

- deur grafieke in die Cartesiese vlak

sodat die nuttigste voorstellingvir ‘n gegewe situasie gekies kan word.

LU 5

DatahanteringDie leerder is in staat om data te versamel, op te som, voor te stel en krities te ontleed om gevolgtrekkings en voorspellings te maak en om toevallige variasie te interpreteer en te bepaal.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

5.1 vrae stel oor menseregte-, sosiale, politieke, omgewings-, en ekonomiese sake in Suid-Afrika;

5.2 geskikte metodes kies, staaf en gebruik vir die versameling van data(alleen en/of as lid van ‘n groep of span), insluitend vraelyste, onderhoude, eksperimente en bronne soos boeke, tydskrifte en die Internet, om vrae te beantwoord en gevolgtrekkings en voorspellings oor die omgewing te maak;

5.3 numeriese data op verskillende maniere organiseer ten einde ‘n opsomming te maak deur die volgende vas te stel:

5.3.1 bepalers van sentrale neiging;
5.3.2 bepalers van verspreiding;
5.4 ‘n verskeidenheid grafieke met die hand of met behulp van tegnologie teken om data voor te stel en te interpreteer, insluitend:
5.4.1 staafgrafieke en dubbele staafgrafieke;
5.4.2 histogramme met gegewe en eie intervalle;
5.4.3 sirkeldiagramme;
5.4.4 lyn- en gebroke lyngrafieke;
5.4.5 verspreidingsgrafieke;

Memorandum

Statistiek

Bespreking

- Die leerdermodule is baie volledig en vanselfsprekend. Die meeste van die werk fokus op vaardighede om gegewens te organiseer en te ontleed.
- Opvoeders wat met meer as een graad nege groep werk, het ‘n goeie geleentheid om vergelykende statistiek bykomend tot dié in die module te doen. Die leerders vind dit altyd baie interessant, en dis natuurlik van groot belang as ‘n toepassing van algemene statistiek.

Statistiek voorsien antwoorde

Waar moontlik kan leerders die oop vrae in hierdie deel navors. Dalk het hulle toegang tot inligtingsbronne, en hulle kan dan inligting deel met die res.

Data–insameling

Eksperimente moet noukeurig beplan word sodat dit glad verloop. Die eksperiment met die koeldrank kan baie interessant wees, want baie mense sê dat kola-tipe koeldranke maar almal eenders smaak. Dalk is daar uiteenlopende menings in die klas.

Nog ‘n maklike eksperiment:

- Een-vir-een word leerders ingebring. Hulle word geblinddoek en ‘n knippie word oor die neus geplaas sodat hulle nie kan ruik wat hulle eet nie. Dan kry hulle ‘n klein stukkie óf appel óf rou aartappel om te kou (beide kan ingesluk word – die aartappel sal geen skade doen nie). Daarna, voor die neus oopgemaak word, moet hulle op één van hierdie vrae antwoord: “Was dit ‘n stukkie appel?” of “Was dit ‘n stukkie rou aartappel?”. Omtrent eweveel moet die één vraag as die ánder gevra word. Indien moontlik moet die persone wat die kos aanbied, en die een wat die vrae vra, nie weet wat geëet word nie.
- Inderwaarheid smaak rou aartappel en appel baie dieselfde as jy dit nie kan ruik nie. Dis ‘n

goeie illustrasie van die groot rol wat ons neuse speel in die plesier wat ons uit die smaak van kos put.
- Ons kom weer terug na die dinkeksperiment oor die vra van vrae i.v.m. die TV-nuus. Wat hulle hier bespreek oor die prosedure sal latere werk meer relevant maak.

Die drie middelwaardes

Berei goed voor vir die eksperiment met die lengtes van leerders. Dit neem nie lank as alles reg is nie, en dan is daar nie veel ontwrigting nie.

Maatstawwe van verspreiding

As daar tyd oor is kan die leerlinge staafdiagramme trek van die frekwensies van die afwykings van die twee groepe.

Vergelyking van toetspunte van twee groepe

Self met die drie middelwaardes, die variasiebreedte en die gemiddelde variasie is dit moeilik om ‘n onderskeid te maak tussen die prestasies van leerders in die twee groepe. Ons kom later weer terug om verder te werk met hierdie twee stelle data.

Grafieke

Daar is nie veel wat moeilik is in die grafieke nie –

alles word in die leerdermodule bespreek. Onthou net dat dit ‘n versoeking is om gestipte punte te verbind. Dink mooi oor wat die waardes verteenwoordig, en of die koördinate van die punte op die getrekte lyn hoegenaamd iets beteken.

Inligting uit grafieke

Die grafiek van die motorkoop-onkostes is ‘n voorbeeld van ‘n geval waar dit verkeerd sou wees om die punte te stip en dan met lyne te verbind.

‘n Direkte verband kom voor in sinne met: ‘hoe meer . . . hoe meer . . .” soos “Hoe meer ek studeer, hoe beter is my punte”. ‘n Omgekeerde verband is “hoe meer . . . hoe minder . . .” soos “Hoe versigtiger die regering met sy geld werk, hoe minder belasting moet ons betaal”.

Uiteindelik sien ons die verskil tussen die twee klasse by die tak-en-blaar diagram.

Vra ‘n aardrykskunde-opvoeder of sy ‘n demografiese piramiede kan opspoor. As dit moontlik is om ‘n paar van vorige jare te kry om die groot verandering in die ouderdomme in die bevolking aan te toon, sal die leerders wel waardering begin kry vir die krag van die statistiek.

In die volgende toets moet leerlinge ‘n sektordiagram teken, waarvoor hulle ‘n passer en gradeboog sal benodig. Waarsku hulle vroegtydig.





TOETS

1. 45 kliënte van ‘n videowinkel het ‘n vraelys ingevul. Hier volg die gewens oor die aantal video’s in elke kategorie uitgeneem in ‘n maand. Hierdie syfers is die totale vir al 45 kliënte.

Aksie: 153

Dokumentêr: 19

Drama: 33

Kinderflieke: 210

Komedie: 106

Kung-fu: 88

Liefdesverhale:74

Moord: 52

Nie-Engels: 5

Oorlog: 20

Spanning: 94

Tekenprent: 46

1.1 Hoeveel video's is altesaam in die maand uitgeneem?

1.2 Wat is die (rekenkundige) gemiddelde aantal video's deur kliënte uitgeneem?

1.3 Teken 'n staafdiagram van die video's uitgeneem per kategorie op die blokkiespapier. Onthou om dit te benoem.

2. 'n Sekere klas se leerders wat honde besit het hul honde geweeg. Hier is die frekwensietabel van die gewigte.

HOND	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Kilos	10	9	7	7	23	19	5	17	9	15	7	5	9	7	19	8	17	11	13	7	7	21	21	13	3

2.1 Hoeveel honde besit leerders in die klas altesame?

2.2 Bereken die rekenkundige gemiddelde, mediaan en modus van die gewigte.

2.3 Wat is die variasiebreedte van die gewigte?

3. Leerders is uitgevra oor hul gunsteling aandete, en hier volg die top-vyf keuses van 120 leerders.

Teken ‘n behoorlik benoemde sektordiagram van die gegewens.

Gebraaide hoender en skyfies 30

Pizza en slaai 48

Bredie en groente 12

Groente-lasagne en rys 12

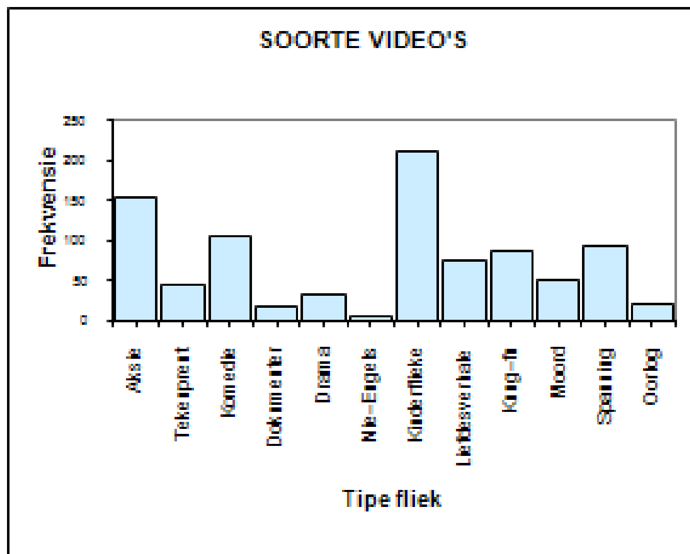
Maalvleis op brood 18

Toets - memorandum

1.1 900 video’s

1.2 20 video’s

1.3 (benoeming nie voltooi)



2.1 25 honde

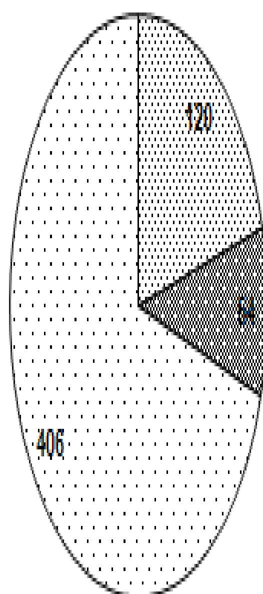
2.2 Mediaan: 9 kg

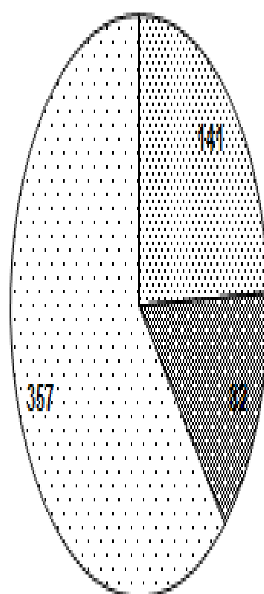
Modus: 7 kg

R. gemiddeld:

293 ÷ 25 = 11,72 kg

2.3 23 – 3 = 20 kg


120
406


141
357

Om betekenisvolle inligting uit data te verkry

WISKUNDE

Graad 9

GETALPATRONE

GRAFIESE VOORSTELLINGS

VERGELYKINGS

STATISTIEK

WAARSKYNLIKHEIDSLEER

Module 19

OM BETEKENISVOLLE INLIGTING UIT DATA TE KRY

AKTIWITEIT 1

Om betenisvolle inligting uit data te verkry

[LU 5.5]

Soos jy weet, sien ons grafieke oral: in advertensies, handboeke, tydskrifartikels en in wiskundeklaskamers. Nou bekyk ons verdere grafieke om te sien wat ons kan sê van die statistieke wat hulle verteenwoordig.

As ons ’n enkele stel waardes het, soos die eetgewoontes van sommige leerders, gebruik ons ’n eenvoudige grafiek soos ’n sektordiagram.

- Daar is egter dikwels ’n *verband* tussen twee stelle waardes. Dit word ’n *relasie* genoem.
- Hier is ’n paar voorbeelde uit vorige afdelings: aantal gevangenes in sekere jare; hoogte bo seespieël van plekke naby ’n sekere punt; bedrag wat ’n tuinier vra vir ’n sekere tyd gewerk; y-waardes verkry van x-waardes volgens ’n gegewe formule; ensovoorts.

In hierdie gevalle is daar gewoonlik ’n horisontale as en ’n vertikale as. Ons kyk net weer na die belangrike woorde:

Vergelyking:	x	y
Vergelyking:	Onafhanklike veranderlike	Afhanklike veranderlike
Vloei diagram:	Invoerwaarde	Uitvoerwaarde
Tabel:	Boonste ry	Tweede ry
Koördinate:	Eerste koördinaat	Tweede koördinaat
Grafiek:	x as	y as
Grafiek:	Horisontale as	Vertikale as

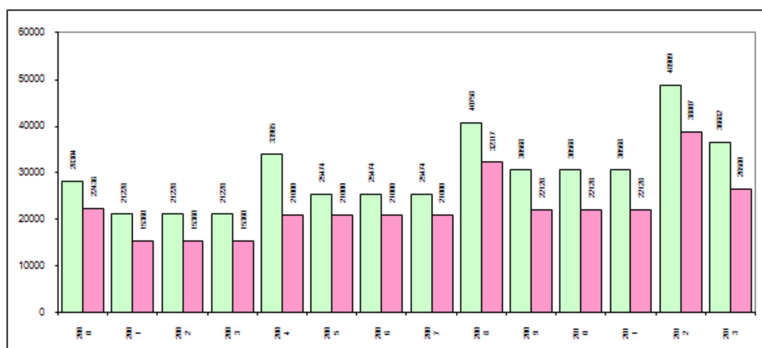
1 James en Gabriel is ewe oud – hulle is vriende wat vir die eerste keer saam begin werk in Januarie 2000. Albei kan maklik per bus werk toe ry. Albei het ook genoeg geld, wat hulle met vakansiewerk verdien het, om die deposito op ’n nuwe motor te dek.

- James wil ’n nuwe motor hê en nou dat hy ’n inkomste het, reël hy huurkoopfinansiering daarvoor. Hy het genoeg geld vir die deposito en kan net-net die maandelikse paaiemente bekostig. Ná vier jaar vervang hy die motor met ’n nuwe een – ’n nuwer model. Hy koop dit weer op huurkoop en betaal die deposito uit die verkoop van die ou motor en betaal die paaiemente gereeld. Begin 2008 doen hy dit weer; elke vier jaar vervang hy sy motor met ’n nuwe.
- Gabriel doen dit anders. In plaas daarvan om onmiddellik ’n nuwe motor te koop, sit hy die geld wat hy vir die deposito sou gebruik het in ’n spaarrekening en spaar genoeg ekstra per maand sodat hy kontant kan betaal vir ’n nuwe motor na vier jaar. In 2004 koop hy net so ’n motor soos sy vriend James. Onmiddellik begin hy weer spaar met maandelikse bedrae net groot genoeg vir dieselfde motor wat James in 2008 wil koop. In 2008 verkoop hy sy ou motor toe hy die nuwe een kry en hy belê die geld weer om te begin spaar vir die volgende motor. Hy vervang dus ook elke vier jaar sy

motor met ’n nuwe.

- Die twee bestuur dus vanaf 2004 presies dieselfde motors!

Die grafiek en tabel gee die besonderhede van hul uitgawes.



Jaar	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
James	28304	21228	21228	21228	33965	25174	25174	25174	40758	30568	30568	30568	48909	36682
Gabriel	22436	15360	15360	15360	21000	21000	21000	21000	32317	22128	22128	22128	38807	26580

1.1 Die horisontale as van die grafiek gee die jare aan. Die stawe toon die geld wat James elke jaar aan paaiemente bestee en wat Gabriel elke jaar spaar. Die ligte staaf is telkens hoër as die donker

staaf in dieselfde jaar. Is die ligte staaf vir James of Gabriel?

1.2 Hoe sou jy sê: Is Gabriel of James die slimste?

1.3 As die vriende beide dieselfde salaris verdien en dieselfde verhogings kry, wie het die meeste geld elke maand oor om op ander noodsaaklikhede of plesiertjies uit te gee?

1.4 Gebruik die waardes in die tabel en bereken hoeveel elke jong man in totaal uitgegee het aan die aankoop van motors gedurende die hele tydperk van 2000 tot 2013.

1.5 As jy begin werk en jou pa bied jou sy ou motor (wat nog steeds lekker loop) aan as ’n geskenk, sou jy dit aanvaar en begin spaar vir ’n nuwe motor soos Gabriel, of sou jy dit bedank en dadelik ’n nuwe motor op huurkoop koop soos James? Verduidelik jou antwoord.

1.6 Gaan gesels met ’n verkoopsman wat nuwe motors verkoop en vra hom om presies te verduidelik waaraan jy moet voldoen voordat jy ’n huurkoopooreenkoms kan aangaan. Vra ook oor versekering, wie die motor besit, en wat gebeur as jy nie kan voortgaan met die paaiemente nie.

2 Reguitlyngrafieke met positiewe gradiënte toon ’n *direkte* verband tussen twee veranderlikes. Sommige grafieke toon ’n *omgekeerde* verband tussen twee

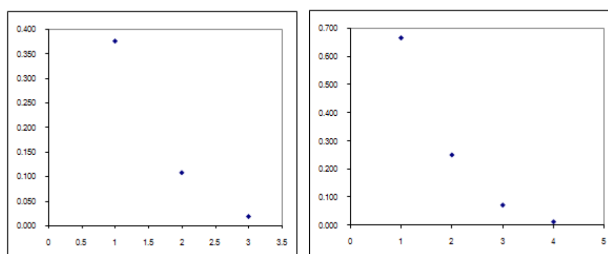
veranderlikes. Ons bekyk twee situasies waar hierdie soort verband voorkom.

2.1 Eerstens ’n geval wat ons weer sal teëkom in die deel oor waarskynlikheidsleer:

- Iemand gooi **een** gewone dobbelsteentjie en jy raai **een** getal tussen 1 en 6. Jy het 1 kans uit 6 dat jy reg sal wees.
- As **twee** steentjies gegooi word en jy raai **een** getal, dan het jy 6 kanse uit 21 dat jy reg sal wees. As jy **twee** getalle raai, is jou kanse 1 uit 21 om beide getalle reg te raai.
- Met drie steentjies: Raai jy **een** getal, is jou kanse 21 uit 56; **twee** getalle gee ’n kans van 6 uit 56, en **drie** getalle gee 1 kans uit 56.

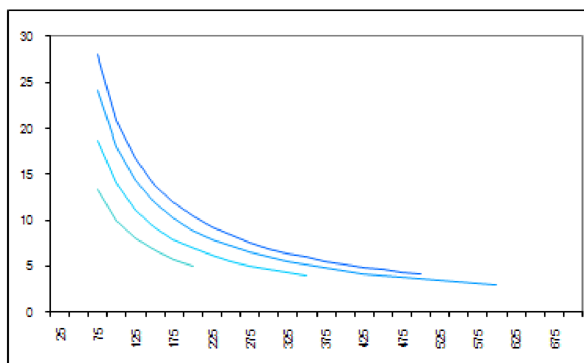
Hier is die puntediagram vir die drie-steentjie spel, en een vir vier steentjies.

- Stel nou voor daar loop ’n kromme deur die punte in elke grafiek (ons kan nie werklik die punte verbind nie – hoekom nie?), dan het daardie lyn ongeveer dieselfde vorm in beide. ’n Kromme met hierdie vorm illustreer ’n omgekeerde verband tussen die twee veranderlikes.



2.2 Nog ’n praktiese voorbeeld van hierdie verband:

- Sindiswa en Alan wil ’n sokkie reël om fondse in te samel vir ’n VIGS-liefdadigheidsorganisasie in hul omgewing. Hulle hoef nie vir die musiek te betaal nie, maar hulle moet ’n saal huur. Daar is vier sale beskikbaar: Saal **A** kos R1 000 vir 200 mense; **B** kos R1 400 vir 350 mense; **C** kos R1 800 vir 600 en **D** kos R2 100 vir 500.



Hier is ’n grafiek wat die kostes van die verskillende sale vergelyk. Afhangende daarvan hoeveel mense die sokkie bywoon (op die horisontale as), toon die

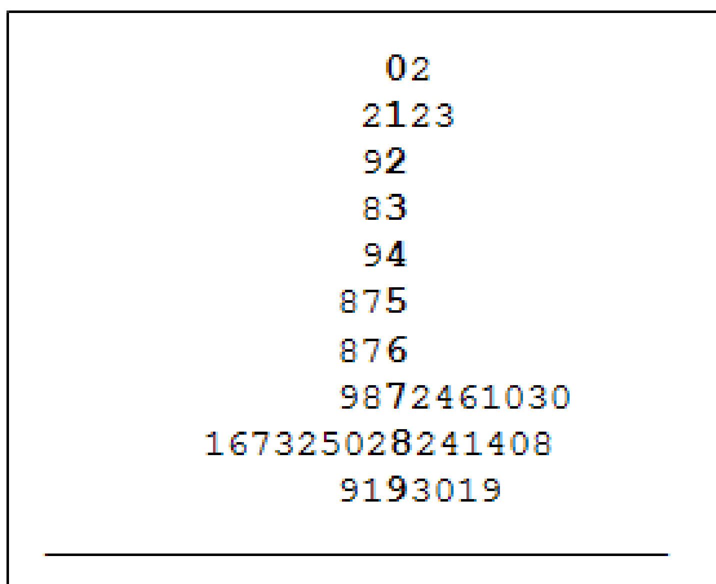
vertikale as die koste per persoon. Hulle wil ten minste R4 000 vir die liefdadigheid insamel, maar sou verkies dat dit R5 000 moet wees.

a) Kan jy uitwerk watter lyn na watter saal verwys? As jy die aantal mense wat in die saal kan pas in ag neem, is dit maklik!

b) Gebruik nou al hierdie inligting en die grafieke en besluit watter saal die beste keuse sou wees. Almal hoef nie noodwendig dieselfde antwoord te kry nie, maar jy moet jou antwoord met goeie argumente staaf.

3 Hier is die tabel met toetspunte weer:

Groep A	82	78	57	91	29	80	85	49	82	67	99	68	83	12	87	86	38	81	58	79
Groep B	72	82	74	84	81	84	76	12	2	71	70	93	13	90	80	73	91	70	99	88

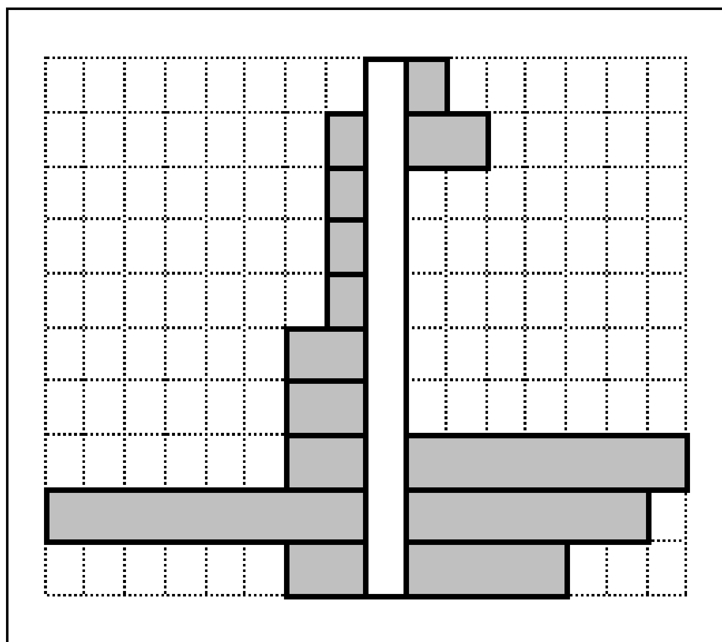


Hieruit maak ons ’n tak-en-blaar grafiek met Groep A links en Groep B regs. In elke waarde word die tiene van die ene geskei. Die tak word deur die tiene gevorm, in die middel af. Elkeen van die ene kom nou langs die gepaste tiensyfer (links of regs volgens die groep).

Bestudeer die grafiek saam met die tabel tot jy presies sien waar elke waarde uit die tabel lê.

- Hierdie waardes het jy in ’n vorige oefening gebruik om te probeer om die verskille tussen die groepe uit te wys. Hierdie tak-en-blaar diagram wys ons verskille wat nóg uit die tabel, nóg uit die berekeninge duidelik was. Byvoorbeeld, Groep A bevat leerders in elke

simboolklas, maar groep B bevat drie leerders met baie swak punte terwyl die res baie goeie punte het.



Regs is dieselfde gegewens in twee horisontale staafdiagramme; een links en die ander regs.

Dis ’n baie algemene en handige manier om data oor twee groepe wat jy wil vergelyk, te vertoon. Vind uit oor demografiese grafieke van jou aardrykskunde-opvoeder. Hierdie soort grafiek word gebruik vir demografiese piramides. Hulle toon dikwels die ouderdomme van die bevolking van ’n land, met vrouens aan die een kant en mans aan die ander. Kyk of jy so ’n grafiek kan opspoor.

AKTIWITEIT 2

Om nie om die bos gelei te word deur swak ingesamelde gegewens of slegte grafieke nie.

[LU 5.5]

Statistiese gegewens kan ons soveel vertel, en grafieke maak statistieke so eenvoudig om te begryp, dat dit maklik is om verkeerde afleidings uit statistieke te maak, of te dink dat iets waar is bloot omdat die grafiek dit so laat voorkom.

Statistici doen waardevolle werk – ons benodig inligting, en ons benodig betroubare inligting.

1 Eerstens kan sake verkeerd loop as ons inligting verkeerd insamel. Dink weer aan die oefening oor die TV-nuus. As jy jou vrae by vulstasies vra, dan kry jy net mense wat 'n motor besit (of ten minste een bestuur). Dit beteken dat mense wat nie bestuur nie, deur jou opname geïgnoreer word. Dalk sou hulle antwoorde jou gevolgtrekking verander het. Ons kan nie sê nie – ons kan dit slegs uitvind deur 'n eksperiment te ontwerp wat niemand per abuis uitsluit nie.

2. Die belangrike punt is dat die steekproef (die mense wat jy vra) die algemene bevolking waaroor jy iets wil weet, moet *verteenwoordig*. Daar is vele maniere om te verseker dat die steekproef verteenwoordigend is. Byvoorbeeld, as daar 1 200

leerders in julle skool is en jy wil weet hoeveel van hulle na kwaito luister, sou jy 30 kon vra en die antwoord met 40 vermenigvuldig om ’n idee te vorm. Maar dit sou nie veel help as al 30 dieselfde ouderdom is nie, of dieselfde rassegroep nie, of dieselfde geslag nie. Vra liewer die skoolsekretaris om jou ’n alfabetiese lys van die leerders te wys. Jy kan elke veertigste naam kies en neerskryf. Nou het jy 30 name – vra *hulle* en vermenigvuldig met 40.

3 Wat is die vraag? As jy by elke huis aanklop en mense vra of hulle hul tande in die oggend geborsel het, sou jy ongetwyfeld vind dat die meeste mense ja sê! Die meeste mense weet dat dit nie sosiaal aanvaarbaar is om nie tande te borsel nie. Hulle wil nie hê dat jy moet dink dat hulle nie van beter weet nie – en dus sê hulle ja.

- Dus is die tweede probleem dat mense leuens vertel. Maar hulle hoef nie bewustelik leuens te vertel om die gegewens onbruikbaar te maak nie. Sê nou jy stuur ’n brief aan elkeen wat 10 jaar gelede by jou skool gematrikuleer het. Jy vra hulle om jou te laat weet wat hulle huidige salaris is. Jy sal dalk ’n antwoord van slegs ’n kwart van hulle kry. Maar, as jy die rekenkundige gemiddelde van hierdie kwart uitwerk, is dit goed genoeg? Dink weer. Eerstens het die skool nie almal se adres gehad nie – jy moes party uitlaat. Sou die skool meer waarskynlik die adresse gehad het van die

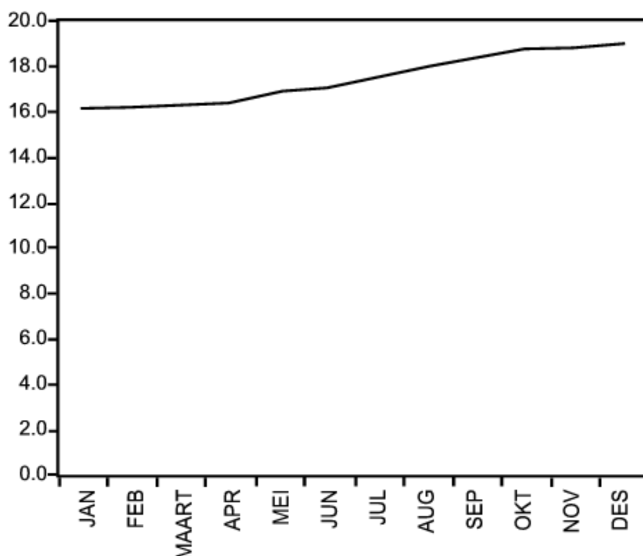
bekende ouens met stabiele werk en ’n vaste adres, of diegene wat rondval en klein werkies doen? En wat van die driekwart wat jou brief weggegooi het – dalk het hulle niks om oor te spog nie. Die mense wat geantwoord het, is waarskynlik heeltemal tevrede om jou te sê wat hulle verdien. Dalk het party selfs iets aangelas. Dis duidelik dat die gemiddelde wat jy hieruit bereken besonder onbetroubaar sou wees.

4 Middelwaarde-probleme

- Jy weet reeds dat die drie middelwaardes die mediaan, die modus en die rekenkundige gemiddelde is. Veronderstel jy soek werk en jy ondersoek die salarisse wat twee werkgewers betaal. Hier volg ’n tabel van die salarisse van werknemers van twee ondernemings. Hulle sê die gemiddelde salaris is R14 000. Beteken dit dat dit nie saak maak watter een jy kies nie? Nee. Wat beteken “gemiddelde” – rekenkundige gemiddelde, modus of mediaan? Werk dit uit en jy kom agter R14 000 is die rekenkundige gemiddelde, maar die mediane is R14 000 en R5 500 onderskeidelik. Watter een kies jy nou? Onthou die mediaan sê dat die helfte van die mense ónder, en die ander helfte van die mense bó daardie waarde val.

A	10 000	10 000	12 000	12 000	14 000	14 000	16 000	16 000	18 000	18 000	
B	1 000	2 000	3 000	4 000	5 000	6 000	7 000	8 000	9 000	95 000	

- Hieruit leer ons dat ons eers moet uitvind watter middelwaarde bedoel word voordat ons kan besluit.



5 Mislei deur grafieke.

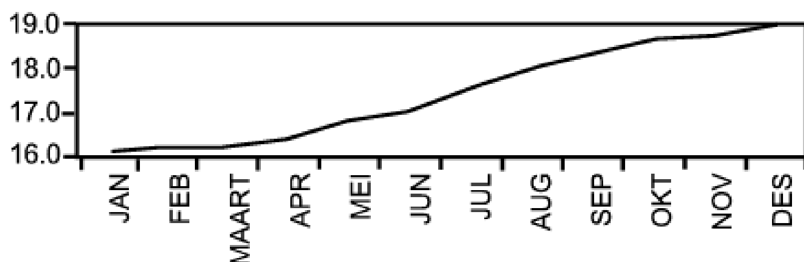
Hier’s drie grafieke – bekyk die eerste.

Die grafiek wys hoe ’n sekere maatskappy se uitvoere binne ’n jaar gestyg het van ongeveer R16 miljoen na ongeveer R19 miljoen – die maande is op die x-as en die bedrag in miljoene op die y-as.

Daar is nie leuens in die grafiek nie – die y–as begin

by nul, en die lyn wys ’n matige opwaartse neiging in uitvoerbedrae.

Dis maklik om te lees en te verstaan.

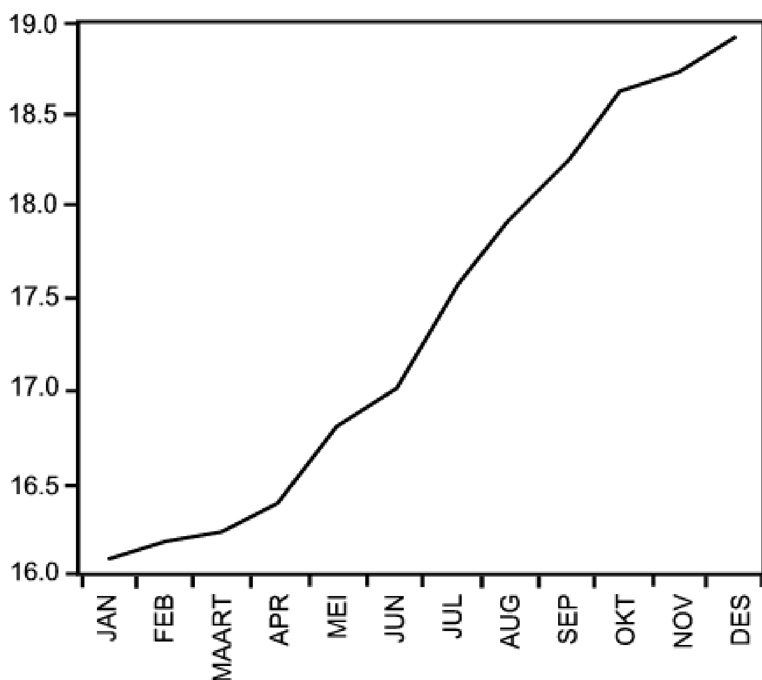


[missing_resource: graphics3.wmf]

Die direkteure van die maatskappy is egter nie tevrede nie. Hulle wil hê meer mense moet in die maatskappy belê. Om dit aan te moedig, besluit hulle om al daardie wit papier bo en onder die grafiek te verwyder deur die y-as waardes te verander.

Hierdie grafiek is steeds eerlik, maar dit mislei ons op die y-as. Dit lyk na ’n dramatiese toename in uitvoere – beginnende by amper niks.

Ons kan heelwat meer doen deur die grafiek ’n bietjie te rek – dalk sal moontlike beleggers hierdeur beïndruk word.



Hier het ons nou uiteindelik ’n heelwat meer indrukwekkende grafiek.

Kyk hoe steil is die grafiek – hierdie maatskappy groei darem lekker!

Dit is belangrik om te bevestig dat al die waardes wat ’n grafiek verstaanbaar maak, gegee word. Partykeer is daar nie waardes langs die asse nie – nutteloos as ’n mens inligting soek. Moenie veel waarde heg aan ’n grafiek wat nie die hele verhaal vertel nie – iemand probeer jou dalk ’n rat voor die oë draai.

Oefening.

6 Bestudeer soveel moontlik grafieke en kyk of almal waar en betroubare inligting weergee. As jy grafieke kry wat jou laat twyfel, bring hulle skool toe om met ander leerders te bespreek. ’n Versameling swak grafieke op die wiskunde-kennisgewingbord sal ons almal waarsku om nie liggelowig te wees nie.

7 Beoordeel die volgende bewerings om te sien of die spreker jou dalk probeer om die bos lei. Neem aan dat die syfers wat genoem word, aanvaarbaar is. Skryf neer as jy dink jy benodig meer inligting voordat jy kan oordeel. Kyk ook of daar foute in die logika van die bewerings voorkom.

7.1 Nuwe Spoedskoon vernietig 85% bakterieë.

7.2 Omdat amper die helfte van alle motorongelukke oor naweke plaasvind, beteken dit dat mense wat oor die naweek bestuur, swakker bestuurders is as die res.

7.3 Verlede jaar het meer mense in vliegtuigongelukke gesterf as tien jaar gelede. Dus word lugvervoer gevaarliker.

7.4 In ’n reisbrosjure staan daar dat ’n sekere plek geskik is vir mense wat nie van warm weer hou nie omdat “die gemiddelde temperatuur 22 °C is”.

8 Hier volg ’n pragtige, beroemde grafiek. Dit lyk nie veel soos ons grafieke nie – dit is inderwaarheid

meer ’n kaart as ’n grafiek. Dit stel egter inligting grafies voor, en dis wat van belang is.



- John Snow was ’n mediese praktisyn in die sentrale deel van Londen in Engeland in die 1850’s. Daar breek toe ’n cholera-epidemie uit. (Cholera is ’n baie ernstige siekte wat dikwels deur besmette water oorgedra word.) Op ’n kaart van die omgewing het Snow die openbare waterkrane (waar die meeste mense hulle water gekry het) met kruisies gemerk. Die huise met cholera-gevalle het hy met kolletjies gemerk. Hy sien toe dat die cholera-gevalle naaste aan die Broadstraat waterkraan voorkom. Hy het

die kraan se handvatsel laat verwyder, en sodoende die epidemie, waarin meer as 500 mense dood is, beëindig. Langs die woord *Broad* sien jy die kruisie vir die waterkraan. As jou oë oopgegaan het vir die waarde van grafieke, sal jy 'n mooi boek van Edward R. Tufte, *The VisualDisplay of Quantitative Information* sekerlik waardeer. Jy sal waarskynlik 'n simpatieke bibliotekaris of 'n universiteitsbiblioteek moet vra.

Bronne:

Mathematics Teacher, Desember 1987

How to Lie with Statistics, Darrell Huff, Penguin Books, 1976

Getal en Ruimte, 5/6 V–A1, J H Dijkhuis et al. Educaboek (Nederland), 1985

Assessering

LU 5
DatahanteringDie leerder is in staat om data te

versamel, op te som, voor te stel en krities te ontleed om gevolgtrekkings en voorspellings te maak en om toevallige variasie te interpreteer en te bepaal.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

5.1 vrae stel oor menseregte-, sosiale, politieke, omgewings- en ekonomiese sake in Suid-Afrika;

5.2 geskikte metodes kies, staaf en gebruik vir die versameling van data(alleen en/of as lid van 'n groep of span), insluitend vraelyste, onderhoude, eksperimente en bronne soos boeke, tydskrifte en die Internet, om vrae te beantwoord en gevolgtrekkings en voorspellings oor die omgewing te maak;

5.3 numeriese data op verskillende maniere organiseer ten einde 'n opsomming te maak deur die volgende vas te stel:

5.3.1 bepalers van sentrale neiging;

5.3.2 bepalers van verspreiding;

5.4 'n verskeidenheid grafieke met die hand of met behulp van tegnologie teken om data voor te stel en te interpreteer, insluitend:

5.4.1 staafgrafieke en dubbele staafgrafieke;

5.4.2 histogramme met gegewe en eie intervalle;

5.4.3 sirkeldiagramme;

5.4.4 lyn- en gebroke lyngrafieke;

5.4.5 verspreidingsgrafieke;

5.5 data krities lees en interpreteer, met 'n bewustheid dat fout- en manipulasiebronne kan bestaan, om gevolgtrekkings en voorspellings oor die volgende te maak:

5.5.1 sosiale, omgewing– en politieke sake (bv. misdaad, staatsbesteding, bewaring, MIV/VIGS);
5.5.2 eienskappe van teikengroepe (bv. ouderdom, geslag, ras, sosio-ekonomiese groep);
5.5.3 houdings of menings van mense t.o.v. sekere sake (bv. rook, toerisme, sport);
5.5.4 enige ander menseregte– en inklusiwiteitsake.

Konteks en terminologie van waarskynlikheidsleer

WISKUNDE

Graad 9

GETALPATRONE

GRAFIESE VOORSTELLINGS

VERGELYKINGS

STATISTIEK

WAARSKYNLIKHEIDSLEER

Module 20

KONTEKS EN TERMINOLOGIE VAN WAARSKYNLIKHEIDSLEER

Hoe werk dobbelary eintlik?

AKTIWITEIT 1

Om die konteks en terminologie van waarkynlikheidsleer te begryp

[LU 1.2, 5.1, 5.6]

1 Al hierdie doodgewone stellings het met waarskynlikhede te doen – maar hulle is nie almal ewe waar nie. Jy en jou maat moet hulle bestudeer

en besluit wat ongesê gelaat is, of watter inligting jy nog benodig voordat jy kan sê hoe waar hulle is. Skryf die uitkomste van julle bespreking netjies neer.

Byvoorbeeld: “Die son sal môre-oggend opkom” beteken eintlik: “As ek moet oordeel na die feit dat die son elke oggend van my lewe nog opgekom het, is ek doodseker dat dit môre weer sal gebeur.”

1.1 As ek ’n munt opskiet, is daar ’n 50:50 kans dat dit muntkant bo sal land.

1.2 Johan sal my definitief vanaand bel.

1.3 Dit is feitlik onmoontlik om die Lotto te wen.

1.4 As jy positief toets vir MIV, dan sal jy aan VIGS sterf.

1.5 Dis meer waarskynlik dat jy van ’n spinnekopbyt sal doodgaan as van ’n weerligslag.

1.6 As aan jou gesê word dat elke lootjie twee nommers het, dan is jou kans om te wen verdubbel.

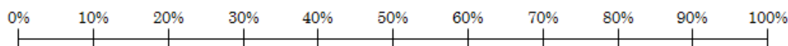
1.7 As jy nie die Lotto speel nie, sal jy definitief nie wen nie.

1.8 As daar 24 mense saam is, is daar waarskynlik twee met dieselfde verjaardag.

1.9 Daar is 25% kans dat dit more sal reën.

1.10 Dis ewe waarskynlik dat jy ’n vier of ’n vyf met ’n dobbelsteentjie sal gooi.

2 Kyk na die onderstaande skaal.



- Die waarskynlikheid dat iets sal gebeur, moet êrens op hierdie skaal van waarskynlikhede lê. Niks kan minder waarskynlik wees as 0% nie, en niks kan meer waarskynlik wees as 100% nie. As jy ’n gewone seskantige dobbelsteentjie gooi, is dit *seker* (bedoelende 100% op die bostaande skaal) dat die getal aan die bokant 1, 2, 3, 4, 5 of 6 sal wees. Dit is onmoontlik (0%) dat dit ’n 7 sal wees. Ons kan nie altyd presies sê waar die waarskynlikheid sal lê nie, maar daar is gevalle waar dit akkuraat uitgewerk kan word.Skryf neer waar jy dink elk van die volgende stellings op die skaal van waarskynlikhede lê. Bespreek dit daarna met jou maat.

2.1 Ek sal ’n ses met ’n gewone dobbelsteen gooi.

2.2 As jy toe-oë ’n Smartie kies, sal dit ’n rooie wees.

2.3 Ek sal volgende naweek by ’n maat gaan kuier.

2.4 Dis ewe waarskynlik om 1, 2, 3, 4, 5 of 6 te gooi

met ’n dobbelsteen.

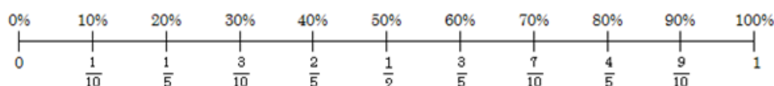
2.5 Ek sal die president van Suid-Afrika eendag ontmoet.

2.6 Ek sal die hele jaar dieselfde lengte bly.

2.7 Ek sal volgende winter ’n verkoue kry.

2.8 Eendag sal ek die president van Suid-Afrika wees.

Ons het nog iets by die skaal gevoeg:



- Waarskynlikhede word dikwels as vereenvoudigde breuke geskryf. Let op dat die skaal vanaf 0 (onmoontlik) tot 1 (seker) loop. Daar is nie waarskynlikhede groter as 1 nie – niks is meer waarskynlik as doodseker nie! Anders gestel, hierdie waarskynlikhede kan nie ’n breuk wees waar die teller groter as die noemer is nie.

- Kyk weer na die dobbelsteen-geval. Die steentjie wys een van ses getalle, maar daar is slegs een kans uit die ses dat dit ’n vier gaan wees. Byvoorbeeld, as ses maats een steentjie gooi en elkeen kies ’n ander nommer tussen 1 en 6, dan is dit doodseker dat een van hulle reg

gaan wees! Dus het elkeen slegs 1 kans uit 6 om reg te wees. Die breuk (die waarskynlikheid) is 16, en dit lê tussen 10% en 20% op ons skaal.

- Die naam vir die gooi van ’n dobbelsteen (of soortgelyke aktiwiteit) is *eksperiment*. Die resultaat ná die gooi is ’n *uitkoms*. As jy, sê, 3 raai en jy gooi ’n 3, dan noem ons dit ’n *suksesvolle uitkoms* of net *sukses*. Met ’n gewone dobbelsteen is daar ses *moontlike uitkomste*. Ons definieer nou die waarskynlikheid dat iets gaan gebeur as:

P = aantal suksesvoll e uitkomste aantal moontlike uitkomste .

AKTIWITEIT 2

Om waarskynlikhede in sekere kontekste te bereken

[LU 1.2, 1.4, 1.7, 5.4, 5.6]

Enkelvoudige eksperimente

1 Daar is 12 balle in ’n sak: 3 blou, 5 groen, 3 wit en een rooi bal.

- As jy een uithaal sonder om te kyk, is die kans dat dit groen sal wees 5 □ 12.
- Ons kan dit skryf as: $P = 512$; maar ook as ’n desimale breuk: $P = 0{,}417$. (Ons gebruik

dikwels desimale breuke vir waarskynlikhede omdat hulle makliker is om te vergelyk.)
- Die waarskynlikheid om ’n wit bal te kies is 0,25. Wat is die waarskynlikheid dat die bal óf blou óf wit sal wees? $P = 3+312=612=12=0{,}5$.

1.1 Bereken die waarskynlik dat óf ’n groen óf ’n blou bal uitgehaal sal word.

1.2 Wat is die waarskynlikheid dat ’n geel bal gekies word?

2 ’n Gewone dobbelsteen word gegooi. Bereken die waarskynlikheid van:

2.1 ’n twee 2.2 ’n onewe getal 2.3 ’n getal wat groter as twee is.

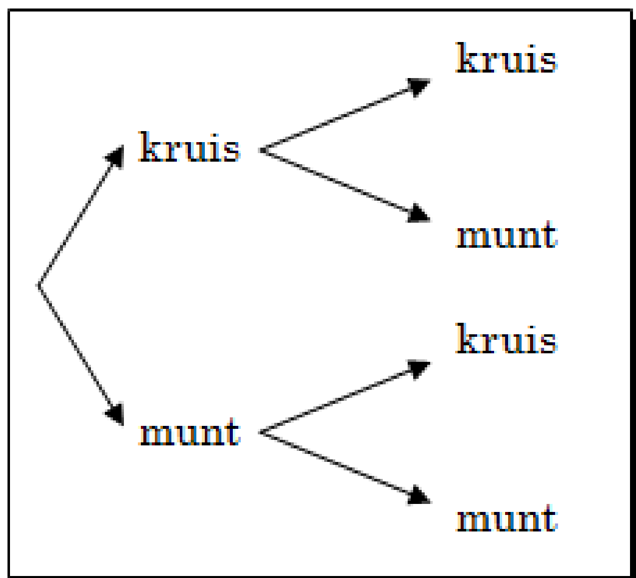
Saamgestelde eksperimente.

3 Beskou die opskiet van ’n muntstuk – die resultaat kan óf kruis óf munt wees.

- Die waarskynlikheid van kruis is dieselfde as munt, naamlik 0,5.
- Maar as jy ’n muntstuk twee keer ná mekaar opskiet, hoe waarskynlik is dit dat jy twee keer ná mekaar munt sal kry?

Ons moet eers bepaal wat die totale aantal uitkomste moontlik kan wees. Ons kry (a) kruis

gevolg deur kruis, of (b) kruis gevolg deur munt; of dalk (c) munt gevolg deur kruis, of (d) munt gevolg deur munt.



Die diagram wys dit as ’n boom. Daar is dus vier moontlike uitkomste. Twee munte ná mekaar gebeur slegs eenkeer uit die vier. Dus is die waarskynlikheid daarvan 14 of 0,25.

Werk uit:

3.1 Wat is die waarskynlikheid dat jy twee *verskillende* kante van die muntstuk na mekaar sal kry?

4 Nog voorbeelde uit die sak met balle:

- Nou is daar vier balle – 1 elk rooi (R), groen (G), blou (B) en wit (W).

- Prosedure: Haal ’n bal uit, neem kennis van die kleur, plaas dit terug en haal nog ’n bal uit.
- Byvoorbeeld: Haal ’n rooi bal uit, gevolg deur ’n wit. Ons kan dit skryf as RW.

As jy dit doen, wat is die waarskynlikheid dat jy al twee keer blou balle sal uithaal?

- Eerstens, wat is die totale moontlike uitkomste?

- RR ; RG ; RB ; RW as die eerste bal rooi was.
- GR ; GG ; GB ; GW as die eerste bal groen was.
- BR ; BG ; BB ; BW as die eerste bal blou was.
- WR ; WG ; WB ; WW as die eerste bal wit was.

4.1 Teken die boomdiagram vir hierdie situasie.

Ons kan nou sien dat die totale aantal uitkomste 16 is! Van hulle is slegs één BB, dus is ons waarskynlikheid $1/16 = 0{,}063$. Bereken die waarskynlikheid van

4.2 twee balle van dieselfde kleur.

4.3 twee balle met verskillende kleure.

4.4 ten minste een wit bal.

4.5 ’n blou bal met die tweede trekking.

4.6 ’n geel bal.

4.7 geen rooi balle.

AKTIWITEIT 3

Om te begryp dat kennis van risiko’s belangrik is vir lewensbesluite

[LU 5.1, 5.5]

RISIKO’S

Ons aanvaar sekere risiko’s in ons daaglikse lewe – ons kan hulle skaars vermy. Ons kan nie alle risiko’s uitskakel nie, maar as ons tussen die grotes en die kleintjies kan onderskei, sal dit wel help. Dis moeilik om alles van risiko’s te bestudeer, maar as ons die beginsels verstaan, kan ons meer dikwels eenvoudige, wyse besluite neem.

Ons word daagliks blootgestel aan vele risiko’s – hier is ’n paar waaroor ons gerus kan dink:

1. Radioaktiewe bestraling kan kanker veroorsaak. As al die klein bietjies bestraling waaraan ’n mens blootgestel word, ophoop, loop jy ’n groter risiko om kanker op te doen. Waar kom al hierdie strale vandaan?

- Eerstens is daar natuurlike radioaktiewe bestraling – oral om ons – vanuit die ruimte en

vanuit die aarde. Dit maak ’n groot verskil waar jy woon. Radon is ’n radioaktiewe gas wat deur rotse kom en vasgevang kan word in woonhuise. As jy sou belangstel, kan daar vir radon in jou huis getoets word. Maar as jy net seker maak dat daar gereeld vars lug deur die huis waai, is jou risiko al baie minder, al weet jy nie hoeveel daar uit die grond syfer nie.

- Natuurlik is kernwapens ’n bestralingsrisiko – dink net aan die atoombomme wat teen die einde van die Tweede Wêreldoorlog op Japan laat val is. Baie mense het in die ontploffing gesterf en baie het later weens bestraling beswyk, maar mense kry ook nou nog kanker omdat hulle toe blootgestel is.
- Ongelukke by kernkragstasies veroorsaak partykeer dat radioaktiwiteit ontsnap. Mense wat in so ’n ongeluk bestraal word, loop die risiko om te sterf, of om later kanker te kry.
- Gewone mediese *x*-strale maak nie ’n groot verskil aan die meeste mense se daaglikse blootstelling aan radioaktiwiteit nie. Dit is egter slim om nie onnodig *x*-strale te laat neem nie. Net ná die ontdekking van *x*-strale was dit ’n groot nuwigheid en mense het min omgegee oor hulle blootstelling. Dit is nou amper onmoontlik om dit te begryp – maar hulle het doodgewoon nie die risiko’s verstaan nie.

2 Elke keer as jy reis, neem jy meer risiko’s. Ongelukke gebeur dikwels. Maar daar is groot

verskille in die risiko van die verskillende soorte vervoer. Passasiersvliegtuie is besonder veilig, maar motorvoertuie is heelwat erger. Hierdie soort risiko word soos volg bereken: Deel die aantal mense wat in ’n sekere tydperk sterf deur die totale aantal kilometers wat al die passasiers gereis het, vermenigvuldig met die aantal passasiers. Hierdie verhouding is *sterftes per persoon-kilometer*. Hierdie waarde is hoër vir motorkarre as vir vliegtuie en daarom kan ons sê dat dit veiliger is om te vlieg as om in ’n motor te reis.

- Baie mense glo dat lugreise baie onveilig is. Een van die redes hiervoor is dat ’n vliegongeluk baie sterftes kan veroorsaak terwyl daar gewoonlik min mense in ’n motorongeluk kan sterf. ’n Mens moet egter onthou dat daar relatief min vliegtuigongelukke is, maar mense sterf daagliks in motorongelukke. Daarom is die sterftes per persoon-kilometer die regte manier om hulle te vergelyk. Terloops, motorfietsryers loop ’n nog groter risiko as motorpassasiers.
- As jy jou voertuig wil laat verseker, sal jy sien dat versekeraars hierdie risiko-syfers in ’n ernstige lig beskou. Hulle weet ook dat mense in sekere ouderdomsgroepe ’n groter risiko loop. Daarom is die premies vir jong mans heelwat hoër as dié vir ou tannies.

3 Ons loop ook daagliks die risiko dat ons kan siek

word. Daarom is dit verstandig om jou liggaam op te pas en om bewus te wees van metodes om jouself teen siektekieme te beskerm. Byvoorbeeld: Mense loop ’n groter risiko om siektes op te doen as hulle hul gesig of kos aanraak sonder om hulle hande te was nadat hulle aan deurknoppe, ens. geraak het waar siekes dalk was.

4 ’n Ander risiko-faktor vir nie-rokers is die tweedehandse sigaretrook van rokers. Hulle risiko om longkanker of ander longsiektes op te doen is hoër as normaal, veral as hulle ook nog dikwels blootgestel word aan besoedelde lug.

- Jy kan waarskynlik aan nog ander risiko’s dink. Skryf in klein groepies nog ’n paar ander risiko-faktore in die alledaagse lewe neer.

ONSEKERHEID

As ’n mens ’n toets ondergaan vir ’n sekere siekte, is daar gewoonlik onsekerheid verbonde aan die toetsresultaat. Dit beteken dat as, byvoorbeeld, die toetsuitslag negatief is, daar dalk tog ’n kans kan wees dat die pasiënt die siekte het; en ook, al was die toets positief, is daar ’n kans dat die pasiënt nie die siekte het nie.

Dis hoekom ’n toets ná ’n rukkie herhaal kan word vir bevestiging, veral in die geval van ernstige siektes.

DOBBELKANSE

Ons het reeds gesien dat, as jy een dobbelsteentjie gooi, die kans om reg te raai 1 uit 6 is. Gooi nou twee dobbelstene (een rooi en een swart) en raai ’n getal tussen 2 en 12. Wat is die kans dat jy reg raai?

Hier is ’n tabel met die uitkomste vir die gooi van twee dobbelstene. Ons sien maklik dat daar 36 uitkomste is.

Swart steen \ Rooi steen	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

As jy 12 raai, is daar slegs 1 kans uit 36 (P = 0,028) dat jy reg is. Maar as jy 3 raai, het jy 2 kanse uit 36

(P = 0,56) om reg te wees, naamlik 1 op die swart en 2 op die rooi steentjie OF andersom: As die slimkop 7 raai, dan is die kans 6 uit 36 (P = 0,167).

Die kans om al ses nommers in die Lotto reg te raai is ongeveer 1 uit 14 miljoen. Dit is ’n bitter geringe kansie! Of dalk is dit net lekker (as jy dit kan bekostig) om te droom oor wat jy met die wengeld kan doen as jy sou wen.

Bron:

Pythagoras, Nommer 52, Augustus 2000

Assessering

Leeruitkomstes(LUs)
LU 1
Getalle, Bewerkings en VerwantskappeDie leerder is in staat om getalle en die verwantskappe daarvan te herken, te beskryf en voor te stel, en om tydens probleemoplossing bevoeg en met selfvertroue te tel, te skat, te bereken en te kontroleer.
Dit is duidelik wanneer die leerder:
1.2 rasionale getalle (insluitend baie klein getalle in

wetenskaplike notasie) herken, gebruik en voorstel, en in staat is om sonder huiwering tussen ekwivalente vorms in gepaste kontekste te beweeg;

1.3 probleme in konteks oplos, insluitend kontekste wat gebruik kan word om ‘n bewustheid van ander leerareas, asook van menseregte-, sosiale, ekonomiese en omgewingsake, te bevorder, soos:

1.3.1 finansiële kontekste (insluitend wins en verlies, begrotings, rekenings, lenings, enkelvoudige en saamgestelde rente, huurkoop, wisselkoerse, kommissie, huur en die bankwese);

1.3.2 meting in die konteks van Natuurwetenskappe en Tegnologie;

1.4 probleme oor verhouding, koers en proporsie (direk en indirek) oplos.

1.7 die eienskappe van rasionale getalle herken, beskryf en gebruik.

LU 5

DatahanteringDie leerder is in staat om data te versamel, op te som, voor te stel en krities te ontleed om gevolgtrekkings en voorspellings te maak en om toevallige variasie te interpreteer en te bepaal.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

5.1 vrae stel oor menseregte-, sosiale, politieke, omgewings-, en ekonomiese sake in Suid-Afrika;

5.2 geskikte metodes kies, staaf en gebruik vir die versameling van data(alleen en/of as lid van ‘n groep of span), insluitend vraelyste, onderhoude, eksperimente en bronne soos boeke, tydskrifte en die Internet, om vrae te beantwoord en

gevolgtrekkings en voorspellings oor die omgewing te maak;

5.3 numeriese data op verskillende maniere organiseer ten einde 'n opsomming te maak deur die volgende vas te stel:

5.3.1 bepalers van sentrale neiging;

5.3.2 bepalers van verspreiding;

5.4 'n verskeidenheid grafieke met die hand of met behulp van tegnologie teken om data voor te stel en te interpreteer, insluitend:

5.4.1 staafgrafieke en dubbele staafgrafieke;

5.4.2 histogramme met gegewe en eie intervalle;

5.4.3 sirkeldiagramme;

5.4.4 lyn- en gebroke lyngrafieke;

5.4.5 verspreidingsgrafieke;

5.5 data krities lees en interpreteer, met 'n bewustheid dat fout- en manipulasiebronne kan bestaan, om gevolgtrekkings en voorspellings oor die volgende te maak:

5.5.1 sosiale, omgewing– en politieke sake (bv. misdaad, staatsbesteding, bewaring, MIV/VIGS);

5.5.2 eienskappe van teikengroepe (bv. ouderdom, geslag, ras, sosio-ekonomiese groep);

5.5.3 houdings of menings van mense t.o.v. sekere sake (bv. rook, toerisme, sport);

5.5.4 enige ander menseregte- en inklusiwiteitsake;

5.6 situasies met ewe waarskynlike uitkomste beskou, en

5.6.1 waarskynlikhede vir saamgestelde gebeure bepaal deur tweerigtingtabelle en boomdiagramme te gebruik;

5.6.2 die waarskynlikheid vir die uitkomste van gebeure bepaal en die relatiewe frekwensie daarvan in eenvoudige eksperimente voorspel;

5.6.3 die verskille tussen die waarskynlikheid van uitkomste en die relatiewe frekwensie daarvan bespreek.

Memorandum

Bespreking

- Leerdermodule baie volledig met baie voorbeelde.
- Daar kan meer tyd bestee word aan eksperimente soos die opskiet van muntstukke, gooi van dobbelstene of trek van kaarte uit ‘n pak. So kan leerders hulle tabellering van gegewens ook oefen.
- ‘n Mens kry steentjies met vier kante, agt kante en nog meer. Hulle maak interessante eksperimentele materiaal.
- Dis maklik om ‘n sak van lap te maak waarin mens albasters kan sit vir party van die eksperimente.

Waarskynlikhede

Die leerders kan (met hulp) baie plesier put uit die stellings. Hier is ‘n paar opmerkings.

1.4 Word later weer aangespreek.

1.5 Baie moeilik om te sê.

1.6 Moedig leerders aan om uit te dink dat dit gladnie waar kan wees nie.

1.8 Dis waar – aangesien die meeste klasse meer as 24 leerders het, beteken dit dat meer as die helfte van die klasse in die skool leerders met dieselfde verjaardag moet bevat. Laat die leerders dit navors.

2.1 Slegs 1 in 6

2.2 Hulle sal met smarties moet eksperimenteer!

2.4 Dis waar (tensy die steentjie vals is, en dit gebeur ook).

Die studie van risiko's is ingewikkeld, maar daar is baie interessante aspekte. As daar tyd is kan leerders aangemoedig word om meer daaroor uit te vind en te bespreek.

TOETS

Hierdie eenheid het nie 'n toets nie.

- Hierdie gids moet twee A4-velle bevat: een blokkiespapier en een assestelsel.
- Twee papierkopieë van elk is hierby ingesluit – maar nie elektronies nie.

Sommige vierhoeke en hul kenmerke

WISKUNDE

Graad 9

VIERKANTE, PERSPEKTIEFTEKENING, TRANSFORMASIES

Module 21

SOMMIGE VIERHOEKE EN HUL KENMERKE

AKTIWITEIT 1

Om sommige vierhoeke te verken en hul kenmerke te identifiseer

[LU 3.4]

Hier kry jy met sommige baie belangrike vierhoeke te doen. Ons moet hul kenmerke ken, want hulle kom oral om ons voor in die natuur, maar veral in mensgemaakte voorwerpe.

Aangesien jy lynlengtes en hoekgroottes sal moet meet, moet jy seker maak dat jou liniaal en gradeboog byderhand is. Bring ook ‘n skêr saam vir die uitknip van vierhoeke.

Ons begin egter eers met die woord vierhoek. Dit

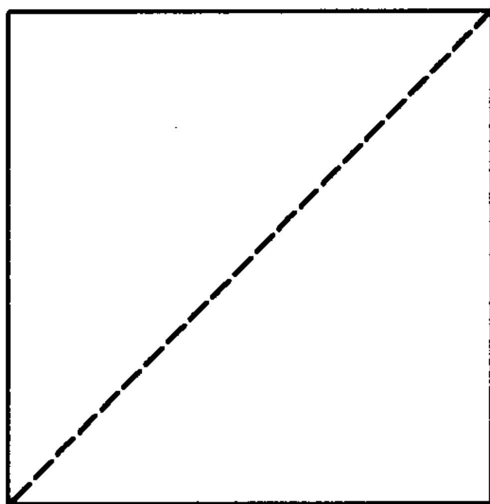
beskryf ‘n plat figuur met vier reguit sye en dus vier hoeke. Ons gaan die sye bestudeer (dikwels in teenoorstaande pare); die binnehoeke (ook dikwels in pare); die diagonale (of hoeklyne), en simmetrie–lyne.

Let op vir nuwe terme en maak seker dat jy hulle goed begryp voordat jy voortgaan.

1. Simmetrie-lyne

Jy is alreeds goed bekend met die vierhoek wat ons ‘n vierkant noem.

Die vierkant



Op die werkvel met vierhoeke is ‘n figuur: “VIERKANT”. Knip dit netjies uit en vou dit om vas te stel of dit enige simmetrie–lyne het.

Simmetrie-lyne is dié lyne waarlangs ‘n mens enige figuur kan vou sodat die twee dele presies opmekaar val.

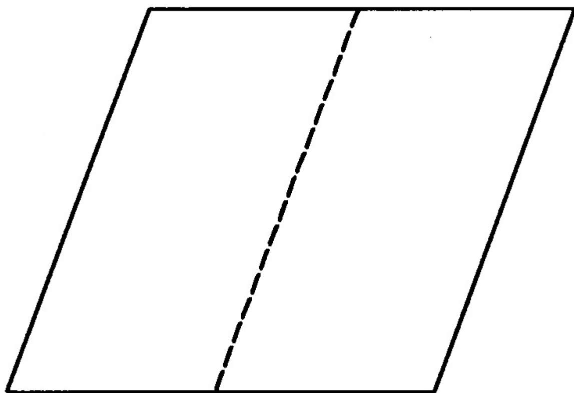
Maak doodseker dat jy al die simmetrie-lyne gekry het. Teken dan die lyne in op die skets langsaan, met ‘n liniaal. Daar is alreeds een van hulle ingevul as ‘n voorbeeld.

Toevallig is die stippellyn op die skets ook ‘n hoeklyn (diagonaal), aangesien dit van die een hoek na die ander een skuins oorkant getrek is.

- Kyk ‘n bietjie om jou. Kan jy vinnig ‘n vierkant raaksien?

As die vierkant skuins gedruk word, sonder om van grootte te verander, word dit ‘n ruit.

Die ruit



Identifiseer die RUIT op die werkvel. Dit behoort

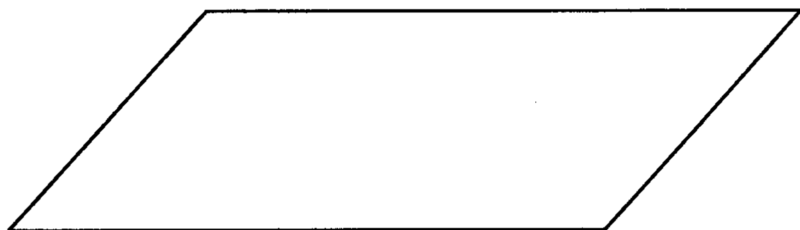
duidelik soos ‘n vierkant wat skuins staan, te lyk. Knip dit uit sodat jy dit kan vou om die simmetrie–lyne op te spoor. Die ruit word ook ‘n rombus genoem.

Weer eens, trek die simmetrie-lyne in op die skets hier langsaan.

- Is die stippellyn in hierdie skets ‘n simmetrie-lyn?

As ons nou die ruit uitrek, word ‘n parallelogram gevorm.

Die parallelogram



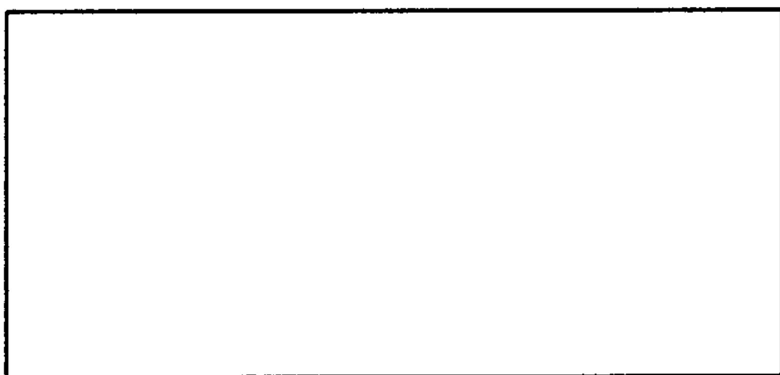
Soek die PARALLELOGRAM op die werkvel.

Knip dit uit; vou dit en soek weer die simmetrie-lyne; trek die lyne in op die skets.

- Om iets met ‘n parallelogram-vorm te kry, sal jy lank moet soek. Huiswerk: Kyk of jy iets binne 24 uur kan kry!

Hierdie parallelogram word ‘n reghoek as ons dit regop druk.

Die reghoek

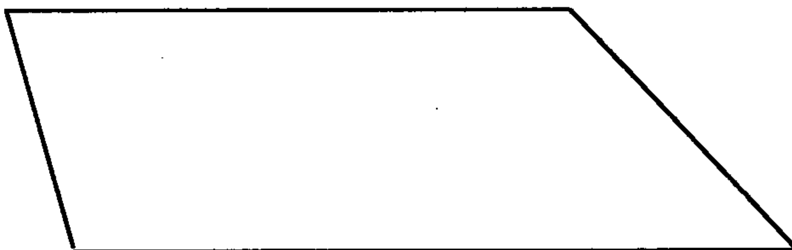


Knip die REGHOEK uit om die simmetrie-lyne te kry om op die sketse in te vul.

- Skryf al die verskille neer wat jy opmerk tussen ‘n reghoek en ‘n vierkant.

As ons nou die twee sykante van die reghoek in verskillende rigtings draai, kry ons ‘n trapesium.

Die trapesium



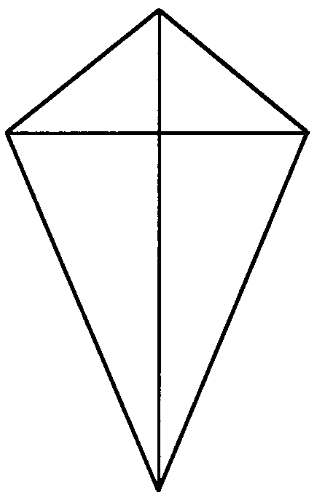
Die werksvel bevat meer as een TRAPESIUM. (Hier is nog ‘n trapesium langsaan.) Knip hulle uit om die

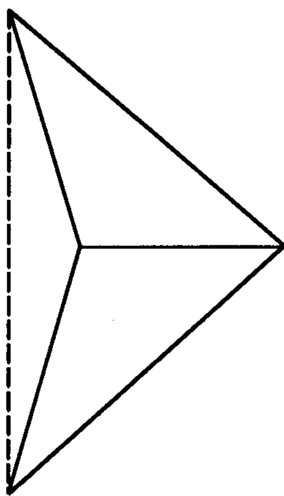
simmetrie-lyne te vind.

- Beskou nou al die soorte trapesiums en skryf ‘n paar sinne om te verduidelik hoe jy hulle sou herken.

Daar is twee soorte VLIEËRS op die werkvel. Knip hulle uit en soek simmetrie-lyne.

Julle weet sekerlik almal wat ‘n vlieër is – die speelding wat aan ‘n toutjie in die lug rondvlieg. Moderne vlieërs het allerhande oulike vorms, maar die vierhoek is vernoem na die eenvoudige papiervlieërs wat maklik gemaak kan word uit twee dun stokkies van verskillende lengtes, papier, gom, ‘n tou, en ‘n stert om dit te stabiliseer.

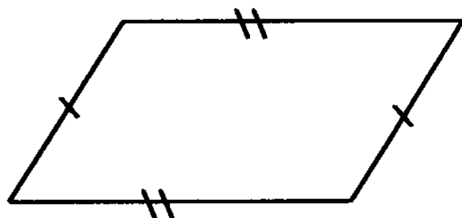




Is daar ‘n spesiale woord vir die stippellyn in een van die vlieërs in die skets?

Het ek goeie werk gelewer in hierdie deel?

2. Sylengtes



Bestudeer nou al die verskillende weergawes van die ses soorte vierhoeke. Meet die sye so akkuraat as moontlik om uit te vind of daar sye is met gelyke lengtes, en merk hulle op die sketse. In hierdie parallelogram is die teenoorstaande sye gelyk, want hulle is gemerk met die klein strepies.

- Is ‘n ruit net ‘n parallelogram met vier gelyke sye?

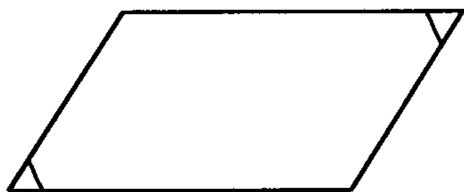
3. Ewewydige sye

Soos jy sekerlik weet, bly ewewydige lyne altyd ewe ver van mekaar af. Dit beteken dat hulle nooit ontmoet nie, al maak jy hulle ook hoe lank. Hulle hoef nie ewe lank te wees nie. Jy weet reeds hoe om ewewydige lyne met klein pyltjies aan te dui.

Nou moet jy ewewydige lyne soek in al jou vierhoeke – dalk moet jy ‘n bietjie meetwerk doen. Dis nie maklik nie, maar as jy konsentreer en metodies te werk gaan, sal jy vorder. Merk dié wat jy vind.

- As jy net een sy van enige trapesium kon verander, sou jy dit ‘n parallelogram kon maak? Hoe moet jy die sy verander?

4. Binnehoekgroottes



Dit is maklik om die binnehoeke met jou gradeboog te meet. Skryf die groottes in op elke skets en soek dan gelyke hoeke en regte hoeke. Merk die gelyke hoeke soos in die skets van die parallelogram hier langsaan.

- Tel die binnehoekgroottes van elke vierhoek bymekaar en skryf die antwoord langs die vierhoek. Verbaas die antwoord jou?

5. Diagonale

Diagonale of hoeklyne word van een hoek na die teenoorstaande hoek getrek. Teken al die hoeklyne van al die vierhoeke (partykeer sal hulle saamval met die simmetrie–lyne).

Meet die hoeklyne om uit te vind in watter vierhoeke die hoeklyne gelyke lengtes het. Merk dié wat eenders is, soos jy gelyke sye gemerk het.

Gebruik jou gradeboog en meet noukeurig teen watter hoek die hoeklyne mekaar kruis, en skryf die waardes in op die sketse. Let op waar hierdie hoeke 90° is.

Die hoeklyne verdeel ook die binnehoeke. Meet hierdie hoeke wat so gevorm word, skryf die waardes in, en soek daardie gevalle waar die hoeklyne die binnehoeke presies halveer.

6. Tabelleer jou bevindings:

Voltooi die volgende tabel (om jou resultate op te som) van al die eienskappe van elke vierkant wat jy ondersoek het.

Maak seker dat jou waarnemings vir alle weergawes van dieselfde vorm geld. Byvoorbeeld, een trapesium het dalk gelyke hoeklyne, maar geld dit vir alle trapesiums? As jy vind dat 'n ruit twee gelyke hoeklyne het, is die regte naam daarvoor wel "ruit"?

Hierdie tabel is vol nuttige inligting. Maak seker al die inskrywings is korrek, en hou dit vir die volgende oefeninge.

	Vierkant	Ruit	Parallelo–gram	Reghoek	Trapesium	Vlieër
Aantal simmetrie–lyne						
Alle sye gelyk						
2 pare teenoorstaande sye gelyk						
2 pare aanliggende sye gelyk						
2 pare ewewydige sye						
Slegs 1 paar ewewydige sye						
Geen ewewydige sye						
Alle binnehoeke gelyk						
2 pare teenoorstaande						

binnehoeke
gelyk
Slegs
1 paar
teenoorstaande
hoeke
gelyk
Hoeklyne
altyd
gelyk
Hoeklyne
loodreg
op
mekaar
Beide
hoeklyne
halveer
binnehoeke
Slegs
een
hoeklyn
halveer
binnehoeke
Beide
hoeklyne
halveer
oppervlakte
van
vierhoek
Slegs
een

hoeklyn halveer oppervlakte

Hoeklyne halveer mekaar

Assessering

LU 3
Ruimte en Vorm (meetkunde)Die leerder is in staat om eienskappe van en verwantskappe tussen tweedimensionele vorms en driedimensionele voorwerpe in ‘n verskeidenheid oriëntasies en posisies te beskryf en voor te stel.
Dit is duidelik wanneer die leerder:
3.2 die onderlinge verwantskappe van meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe se eienskappe beskryf met bewyse in kontekste, insluitend dié wat gebruik kan word om ’n bewustheid van sosiale, kulturele en omgewingsake te bevorder, insluitend:
3.2.2 transformasies;
3.3 die meetkunde van reguitlyne en driehoeke gebruik om probleme op te los en verwantskappe in meetkundige figure te bewys;te beskryf, insluitend:
3.4 meetkundige figure teken en/of konstrueer en

modelle van driedimensionele voorwerpe maak om die eienskappe daarvan en van modelsituasies in die omgewing te ondersoek en te vergelyk.

Memorandum

Vierhoeke

Bespreking

Woordeskat

In hierdie leereenheid kom heelwat nuwe terme by. Party leerders sal reeds die woorde begryp, ander sal moet bygebring word. Wees waaksaam – baie woorde wat in algemene gebruik is, het dikwels ‘n meer beperkte gebruik in ‘n wiskundige konteks.

Benadering

Daar word van die leerders verwag om te doen sodat hulle werklik kan begryp wat die vierhoeke behels. Moedig hulle aan om te eksperimenteer totdat hulle die eienskappe goed verstaan. Op hierdie stadium kan hulle begin om ‘n samevatting van meetkundige grondbeginsels op te bou vir eie gebruik in die senior fase.

Baie leerders vind ruimtelike konsepte moeilik – hulle het dalk ekstra hulp nodig by basiese werk soos die noukeurige meet van lynlengtes en hoeke.

Dis ‘n goeie rede om meer aandag aan hierdie aspekte te wy, in plaas daarvan om dit te ignoreer. Dit is tog belangrike lewensvaardighede. Maak seker dat daar ‘n paar ekstra bruikbare liniale en gradeboë in die klas is.

Die diagramblaaie kan gekopieer word, sodat elke leerder toegang het tot soveel as hy benodig om werklik die stryd aan te sê met probleemoplossing in meetkunde. Die basis wat nou gelê word, sal groot gevolge hê in die senior fase.

1.2 Die stippellyn in die ruit is NIE ‘n simmetrie-lyn nie – ‘n mens kan net die figuur langs die lyn vou om dit te bevestig.

1.4 Daar is verbasend min verskille tussen die reghoek en die vierkant. As ons later ‘n tabel maak, sal dit duidelik daaruit blyk.

1.5 ‘n Mens moet versigtig wees dat leerders nie aanneem dat trapesiums simmetries moet wees nie. Maak ook seker dat hulle nie onder die algemene vals indruk verkeer dat ewewydige lyne dieselfde lengte moet hê nie.

1.6 Die stippellyn in die vlieër is eintlik ‘n hoeklyn – dit is ongewoon dat hoeklyne buite die figuur lê. Dit is nie ‘n simmetrie-lyn nie, inderwaarheid stem dit ooreen met die “kort” hoeklyn van die ander vlieër. Hier langsaan is ‘n vlieër waar die kort hoeklyn ook die simmetrie-lyn is.

2. Ja, ‘n ruit IS ‘n parallelogram.

3. ‘n Baie interessante vraag – die ooglopende antwoord is om een van die nie-ewewydige sye parallel aan die teenoorstaande sy te maak. MAAR die gevolg daarvan is dat die lengte van een van die ewewydige sye dan verander. Dus, twee sye sal moet verander.

4. Herinner die leerders aan die stelling dat ko-binnehoeke by ewewydige lyne supplementêr is. Wys gerus die leerders weer dat ‘n vierhoek in twee driehoeke verdeel kan word om te bewys dat die som van die binnehoeke van enige vierhoek 360° is. Benewens die eienskappe van die hoeklyne van die vierhoeke, is hulle van belang aangesien hulle vierhoeke in driehoeke verdeel – en die leerders ken reeds baie tegnieke om op driehoeke toe te pas.

Wanneer leerders die tabel invul, moet hulle dit eers in potlood doen – hulle sal sekerlik nie perfekte antwoorde hê nie, maar as hulle klaar is moet hulle in besit wees van ‘n korrekte en bruikbare instrument.

Die oefening om vierhoeke te vergelyk het nie net een stel korrekte antwoorde ten doel nie; vierhoeke is baie aanpasbaar. Die eintlike waarde in die oefening is dat leerders moet gewoond word om hulle antwoorde te motiveer met die doel om ‘n aanhoorder te oortuig. Die beste rol vir die

opvoeder is om gedurig te vra, “Waarom sê jy so?”, en om die groeplede aan te moedig om nie stellings van mekaar te aanvaar sonder verduidelik en motivering nie. Hierdie vaardigheid (om in staat te wees om jou bewerings te staaf) is algemeen van toepassing en van belang.

In ander boeke word die definisies van vierhoeke dalk in ander volgordes gegee. Hier is niks mee fout nie. Op hierdie stadium kan die leerders ‘n taak gegee word om die uitgeknipte vierhoeke in ‘n struktuur van verwantskappe te plaas, en in te plak.

Vergelyking van vierhoeke ten opsigte van verskille en ooreenkomste

WISKUNDE

Graad 9

VIERKANTE, PERSPEKTIEFTEKENING, TRANSFORMASIES

Module 22

VERGELYKING VAN VIERHOEKE TEN OPSIGTE VAN VERSKILLE EN

OOREENKOMSTE

AKTIWITEIT 1

Om vierhoeke te vergelyk ten opsigte van ooreenkomste en verskille

[LU 3.4]

1. Vergelykings

Werk saam in klein groepies aan die volgende oefening. Vergelyk die pare vierhoeke wat hieronder aangegee word. Skryf neer in watter opsigte hulle eenders is en hoe hulle verskil. Probeer om te sê hoe om die een in die ander te verander – as jy dit kan doen, dan verstaan jy hul eienskappe werklik. As ‘n voorbeeld, kyk na die vraag aan die einde van deel 3 hierbo oor ewewydige sye.

Elke groep moet met ten minste een paar vierhoeke werk. As jy met ‘n vlieër werk, ondersoek beide soorte vlieërs.

- Ruit en vierkant
- Trapesium en parallelogram
- Vierkant en reghoek
- Vlieër en ruit
- Parallelogram en vlieër
- Reghoek en trapesium

As jy hierby nóg ‘n paar vierhoeke wil vergelyk, doen dit gerus!

1. Definisies

‘n Kort en akkurate beskrywing van ‘n vierhoek volgens hierdie eienskappe word ‘n *definisie* genoem. ‘n Definisie is ondubbelsinnig, sodat dit slegs op een vierhoek van toepassing is, en sodat ons dit kan gebruik om tussen soorte vierhoeke te onderskei.

Die definisies word in ‘n sekere orde aangegee, want die latere definisies verwys na vorige definisies om hulle korter en makliker verstaanbaar te maak. Daar bestaan meer as een stel definisies; hier volg een so ‘n stel.

- ‘n **Vierhoek** is ‘n vlak figuur begrens deur vier reguit lyne.
- ‘n **Vlieër** is ’n *vierhoek* met twee paar aanliggende gelyke sye.
- ‘n **Trapesium** is ‘n *vierhoek* met een paar ewewydige teenoorstaande sye.
- ‘n **Parallelogram** is ‘n *vierhoek* met twee paar ewewydige teenoorstaande sye.
- ‘n **Ruit** is ‘n *parallelogram* met gelyke aanliggende sye.
- ‘n **Vierkant** is ‘n *ruit* met vier gelyke binnehoeke.
- ‘n **Reghoek** is ‘n *parallelogram* met vier gelyke binnehoeke.

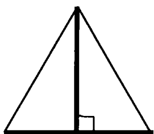
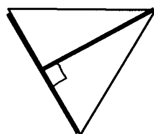
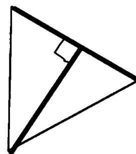
AKTIWITEIT 2

Om informeel formules vir die oppervlaktes van vierhoeke te ontwikkel

[LU 3.4]

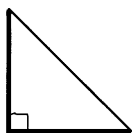
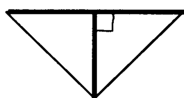
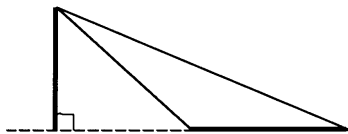
Bereken oppervlaktes van plat figure

- Ons begin by die oppervlaktes van driehoeke: Julle het dalk al die woorde, “half basis maal hoogte” gehoor. Dis die formule vir die oppervlakte van ‘n driehoek. Ons gebruik **A** vir die *oppervlakte*, *h* vir die *hoogte* en *b* vir die *basis*.
- Oppervlakte = ½ × basis × hoogte; A = ½ *bh*; A = bh2 is verskeie weergawes van die formule.
- Wat is nou eintlik die *basis*? En wat is die *hoogte*? Wat belangrik is, is dat die hoogte en die basis saam hoort: die basis is nie net sommer enige sy nie, en die hoogte nie sommer net enige lyn nie.

- Die hoogte is altyd ‘n lyn wat loodreg is op dié sy wat jy die basis noem. Verwys na die sketse hierbo. Die basis en sy ooreenstemmende

hoogte is donker lyne. Hieronder is nog drie voorbeelde van basis/hoogte-pare.

- Trek met twee ander kleure die ander twee basis/hoogte-pare in elk van die boonste ses driehoeke, elke paar in sy eie kleur. Doen daarna die volgende oefening:

Kies een van die driehoeke en bereken sy oppervlakte drie keer. Meet die lengtes met jou liniaal en gebruik elke slag ‘n ander basis/hoogte-paar vir jou berekening. Stem die antwoorde grootliks ooreen? Indien nie, meet weer versigtig en doen weer die som.

Die hoogtelyn lê gewoonlik binne die driehoek. Dit is die geval in vier van die ses driehoeke hierbo, maar in die geval van ‘n reghoekige driehoek is die hoogtelyn een van die sye, soos in die vierde driehoek. In die sesde driehoek is dit nodig om die hoogtelyn *buite* die driehoek te trek.

Opsommend:

As jy die oppervlakte-formule wil gebruik, moet jy ‘n basis en ‘n hoogte hê wat saam hoort en jy moet hulle lengte ken of kan bereken. In sommige van die

probleme wat volg, sal jy dalk die oppervlakte van ‘n driehoek moet bereken as deel van die werk.

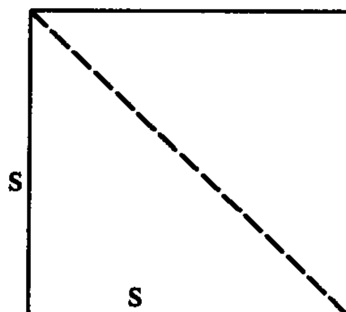
Kyk weer na die Stelling van Pythagoras; onthou dat dit net op reghoekige driehoeke van toepassing is – maar jy kan van nou af baie van hulle te wagte wees.

I

In ‘n reghoekige driehoek is die vierkant op die skuinssy gelyk aan die som van die vierkante op die ander twee sye.

As jy al vergeet het hoe om die stelling toe te pas, moet jy teruggaan na die oefeninge wat jy alreeds gedoen het om jou geheue te verfris.

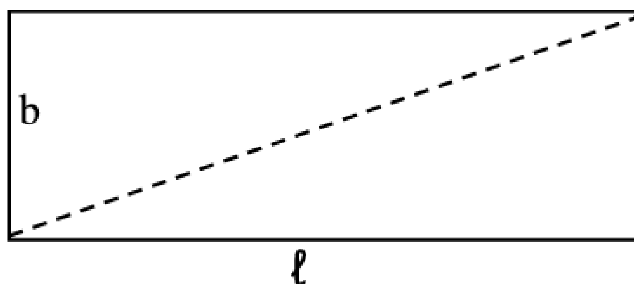
- Bereken die oppervlakte van ΔABC met A = 90°, BC = 10 cm en AC = 8 cm. Dit sal help as jy ‘n redelik akkurate skets maak. Hierdie probleem het twee stappe: Pas eers Pythagoras toe, en gebruik dan die oppervlakte-formule.
- By die berekening van die oppervlakte van ‘n vierhoek gebruik ons dieselfde beginsel: As ons na ‘n *hoogte* verwys, is daar altyd ‘n spesifieke *basis* ter sprake.
- Ons kan by die formule vir die oppervlakte van ‘n driehoek begin en daarvandaan formules vir die ses vierhoeke aflei.



- ‘n Vierkant bestaan uit twee identiese driehoeke, soos in die skets. Die sylengte van die vierkant is *s*. Dan is die oppervlakte (**A**) van die vierkant:

A = 2 × oppervlakte van 1 driehoek = 2 (½ × basis × hoogte) = 2 × ½ × s × s = s2 = sy kwadraat.

Jy weet dit sekerlik alreeds!



-
- Dieselfde metode werk vir die reghoek: Die reghoek is *b* breed en *l* lank, en sy oppervlakte (**A**) is:

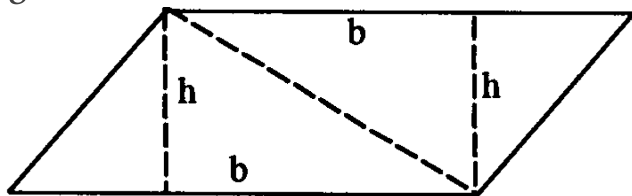
A = eerste driehoek + tweede driehoek

$= (½ \times \text{basis} \times \text{hoogte}) + (½ \times \text{basis} \times \text{hoogte})$

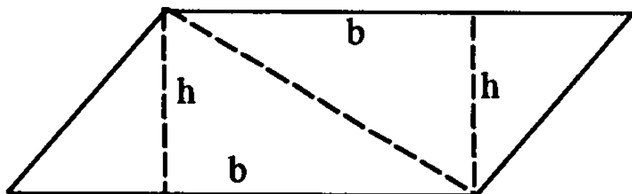
$= (½ \times b \times \ell) + (½ \times \ell \times b) = ½\, \text{b}\, \ell + ½\, \text{b}\, \ell$
$= \text{b}\, \ell$

= breedte maal lengte.

Dus: nog ‘n bekende formule.



- Die parallelogram is ‘n bietjie moeiliker, maar die skets sal help om dit duidelik te maak. Verdeel ons dit in twee driehoeke, dan kan ons dié twee dieselfde basis gee (die lang sy van die parallelogram in elke geval). Ons noem ook hierdie lyn die *basis* van die parallelogram, en ons gebruik die letter *b*. Die *hoogtelyne* (*h*) van die twee driehoeke is ewe lank. (Onthou dat ‘n hoogtelyn altyd *loodreg* op ‘n basis moet wees.)
- Is jy oortuig dat die twee hoogtes dieselfde is? Meet hulle! En wat van die twee basisse? Die oppervlakte is: A = driehoek + driehoek = ½ *bh* + ½ *bh* = *bh* = basis maal hoogte.
- ‘n Uitdaging: Doen dieselfde in die geval van die ruit. (Antwoord: A = *bh*, soos die parallelogram).
-

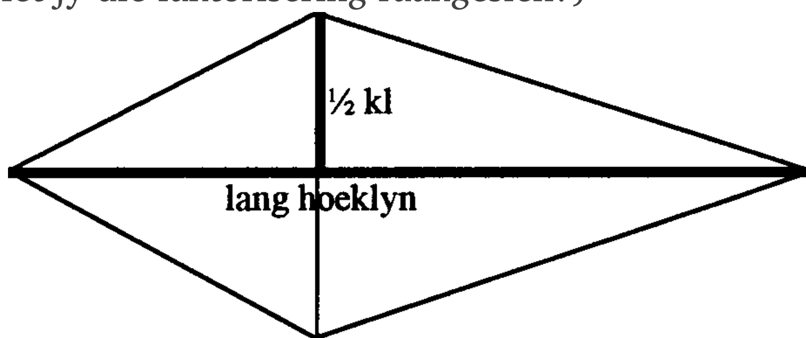


- Kom ons pak die trapesium aan. Aangesien die twee ewewydige sye nie ewe lank is nie, verskil dit van ‘n parallelogram.
- Ons noem hulle **P*s*1** en **P*s*2**. Die twee hoogtelyne, egter, is ewe lank.
- Die hoeklyn verdeel dit in twee driehoeke, en uit hulle skryf ons nou ‘n formule neer vir die oppervlakte van ‘n trapesium:

$A = \text{driehoek}_1 + \text{driehoek}_2 = ½ \times Ps_1 \times h + ½ \times Ps_2 \times h$

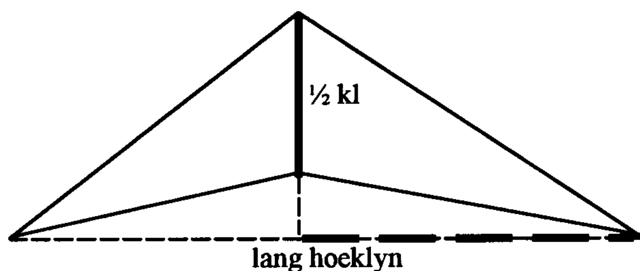
$= ½\, h\, (Ps_1 + Ps_2)$ = half hoogte maal som van ewewydige sye.

(Het jy die faktorisering raakgesien?)



- Laastens kom ons by die vlieër uit. Dit het een lang hoeklyn (ook die simmetrie–lyn) en een kort hoeklyn. Ons noem hulle dus *sl*

(simmetrie-lyn) en *kl* (kort hoeklyn).

- Die simmetrie-lyn verdeel dus die vlieër in twee (kongruente) driehoeke. Omdat ‘n vlieër loodregte hoeklyne het, kan ons baie maklik die oppervlakte-formule vir ‘n driehoek toepas op beide driehoeke.
- Dit beteken dus dat die *hoogte* van beide driehoeke presies die helfte van die kort hoeklyn is: $h = ½ \times kl$. Jy sal sien dat ons h in ½ klverander hieronder!
- 

As jy na die sketse verwys, sal jy oplet dat beide soorte vlieërs op dieselfde wyse by die formule uitkom.

Oppervlakte = 2 identiese driehoeke

$= 2(½ \times sl \times h) = 2 \times ½ \times kl \times ½ \times kl$

$= sl \times ½ \times kl = ½ \times sl \times kl$

= halflang hoeklyn maal kort hoeklyn.

Die vrae in die volgende oefening begin maklik, maar word moeiliker – moenie van die Stelling van

Pythagoras vergeet wanneer jy met regte hoeke werk nie.

Bereken die oppervlaktes van die volgende vierhoeke:

1 Vierkant met sylengte 13 cm

2 Vierkant met hoeklyn 13 cm (gebruik eerstens Pythagoras)

3 Reghoek met lengte 5 cm en breedte 6,5 cm

4 Reghoek met lengte 12 cm en hoeklyn 13 cm (Pythagoras)

5 Parallelogram met hoogte 4 cm en basislengte 9 cm

6 Parallelogram met hoogte 2,3 cm en basislengte 7,2 cm

7 Ruit met sye 5 cm en hoogte 3,5 cm

8 Ruit met hoeklyne 11 cm en 12 cm

(Noem ‘n belangrike feit i.v.m. die hoeklyne van ruite.)

9 Trapesium met die twee ewewydig sye 18 cm en 23 cm wat 7,5 cm van mekaar is.

10 Vlieër met hoeklyne 25 cm en 17 cm

Assessering

LU 3
Ruimte en Vorm (meetkunde)Die leerder is in staat om eienskappe van en verwantskappe tussen tweedimensionele vorms en driedimensionele voorwerpe in ‘n verskeidenheid oriëntasies en posisies te beskryf en voor te stel.
Dit is duidelik wanneer die leerder:
3.2 die onderlinge verwantskappe van meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe se eienskappe beskryf met bewyse in kontekste, insluitend dié wat gebruik kan word om ’n bewustheid van sosiale, kulturele en omgewingsake te bevorder, insluitend:
3.2.2 transformasies;
3.3 die meetkunde van reguitlyne en driehoeke gebruik om probleme op te los en verwantskappe in meetkundige figure te bewys;te beskryf, insluitend:
3.4 meetkundige figure teken en/of konstrueer en modelle van driedimensionele voorwerpe maak om die eienskappe daarvan en van modelsituasies in die omgewing te ondersoek en te vergelyk.

Memorandum

Oppervlakte–berekenings

Daar word eerstens aandag gegee aan driehoek-oppervlaktes omdat dit so ‘n belangrike rol speel in die oppervlaktes van meer komplekse vorms, soos vierhoeke. Dis ook ‘n goeie aansluitingspunt tussen die bekende en die onbekende. Belangrike voorafkennis is weer die Stelling van Pythagoras.

‘n Algemene probleem by oppervlakte-berekenings is dat die hoogte en basis nie ooreenstem nie. Aangesien dit later weer probleme kan skep, sal dit die moeite loon om nou seker te maak dat almal dit hier bemeester. Die oefening waar leerders gevra word om basisse en hoogtes te meet en driekeer die oppervlakte uit te werk, sal help om die beginsel vas te lê; veral as hulle sien dat verkeerde groepering verkeerde antwoorde gee.

Die memorisering van die formules is minder belangrik as die verstaan van die *proses* wat gevolg word om by die antwoord uit te kom. Hierdie vaardigheid word benodig by die algemene oplossing van meetkunde probleme.

Die oefening is eenvoudig en behels hoofsaaklik die substitusie van waardes in formules, en die

noukeurige en akkurate bepaling van die antwoord.

1. 169 cm^2 (maak altyd seker dat leerders die regte eenhede gebruik)

2. 84,5 cm^2 (dis nie nodig om die sylengte te bereken nie)

3. 32,4 cm^2 4 60 cm^2

4. 36 cm^2 6 16,56 cm^2

5. 17,5 cm^2

6. 66 cm^2 (hoeklyne is loodreg; gebruik Pythagoras)

7. 153,75 cm^2 10 212,5 cm^2

Om begrip van vierhoeke en hul eienskappe toe te pas in probleme

WISKUNDE

Graad 9

VIERKANTE, PERSPEKTIEFTEKENING, TRANSFORMASIES

Module 23

OM BEGRIP VAN VIERHOEKE EN HUL EIENSKAPPE TOE TE PAS IN PROBLEME

AKTIWITEIT 1

Om begrip van vierhoeke en hul eienskappe toe te pas in probleme

[LU 3.7, 4.4]

- Die sketse vir hierdie gedeelte is op ‘n aparte problemeblad. Verwys daarna vir die volgende vrae.
- Werk soos volg in pare: Bestudeer elke probleem onafhanklik totdat jy dit opgelos het, of so ver gekom het as jy kan. Verduidelik dan jou oplossing stap-vir-stap aan jou maat, totdat *hy* dit goed genoeg begryp om dit te kan neerskryf. By die volgende probleem is dit jou maat se beurt om *sy* oplossing aan *jou* te verduidelik sodat *jy* dit kan neerskryf. Onthou dat julle redes of verduidelikings moet verskaf vir alle bewerings wat gemaak word.

1. Bereken die waardes van *a, b, c,* ens. vanuit die inligting by die vraag en in die skets, en beantwoord dan die vraag wat daarop volg.

1.1 In die skets is ‘n vierkant met een sy 3 cm. $a =$ die aanligggende sy.

$b =$ die hoeklyn. $c =$ die oppervlakte van die vierkant.

Hoekom maak die hoeklyn ‘n 45 ° hoek met die sy?

1.2 Dit is ‘n ruit met lang hoeklyn $=$ 8 cm en kort hoeklyn $=$ 6 cm. a $=$ sylengte.

b $=$ oppervlakte van ruit.

Waarom mag jy die Stelling van Pythagoras hier gebruik?

1.3 Die skets is van ‘n reghoek met kort sy $=$ 5 cm en ‘n hoeklyn $=$ 13 cm.

a $=$ die lang sy. b $=$ oppervlakte van die reghoek.

Waarom is die ander hoeklyn ook 13 cm?

1.4 Die parallelogram het een binnehoek $= 65^{\circ}$, hoogte $=$ 3 cm en lang sy $=$ 9 cm.

a $=$ klein binnehoek. b $=$ groot binnehoek. c $=$ oppervlakte van parallelogram

Verduidelik waarom hierdie parallelogram dieselfde oppervlakte het as ‘n 3 cm by 9 cm reghoek.

2. Bereken die waarde van x vanuit die inligting in die sketse.

2.1 Die driehoek is gelykbenig met een van die gelyke sye 15 cm en oppervlakte $=$ 45 cm2.

x $=$ hoogte van driehoek.

2.2 Hierdie trapesium se langste sy is 23 cm en die sy wat ewewydig daaraan is, is 15 cm.

Die hoogte is $=$ 8 cm. $x =$ oppervlakte van trapesium.

Waarom is die twee gemerkte binnehoeke supplementêr?

2.3 Die vlieër se oppervlakte is 162 cm2 en die kort hoeklyn is 12 cm. $x =$ lang hoeklyn.

Waarom is die som van die vlieër se binnehoeke 360 ° ?

2.4 In hierdie skets is dieselfde vlieër van vraag 2.3 in drie driehoeke met gelyke oppervlaktes verdeel (ignoreer die stippellyn). $x =$ boonste gedeelte van die lang hoeklyn.

3. Die volgende probleme bevat inligting waaruit jy ‘n vergelyking moet vorm. Gebruik die kenmerke van die figure. As jy dan die vergelyking oplos, gee dit jou die waarde van x.

3.1 Twee van die hoeke van die ruit is $3x$ en x onderskeidelik.

Hoekom kan hierdie figuur nie ‘n vierkant wees nie?

3.2 In die parallelogram is die groottes van twee teenoorstaande binnehoeke $x + 30°$ en $2x – 10°$ onderskeidelik.

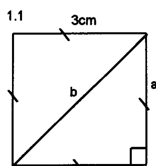
Verduidelik waarom die gemerkte hoek 110° is.

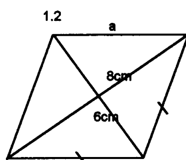
3.3 Die trapesium het twee hoeke van $x - 20^\circ$ en $x + 40^\circ$ onderskeidelik.

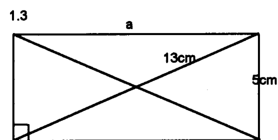
Waarom is dit nie ‘n parallelogram nie?

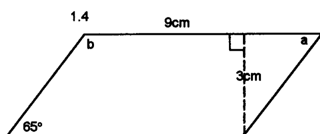
3.4 Die kort hoeklyn van die ruit is getrek; die hoeklyn maak een hoek van 50°, en een binnehoek van die ruit is gemerk met ‘n x.

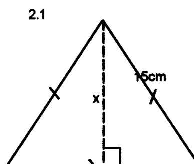
Werkvel vir Leereenheid 1

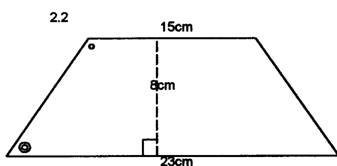


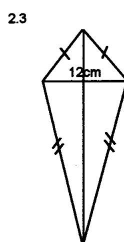


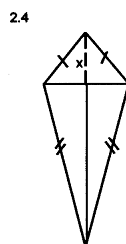


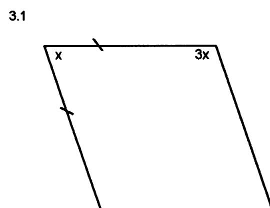


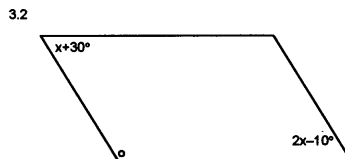


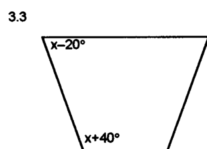


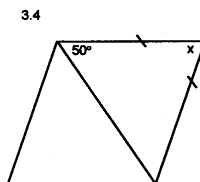




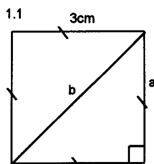


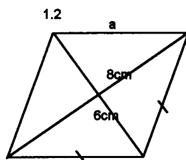


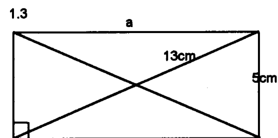


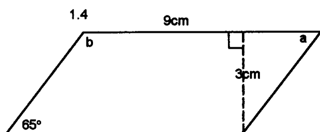


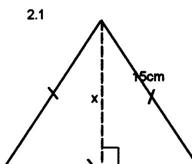
Problemeblad vir Leereenheid 1

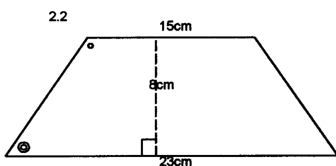


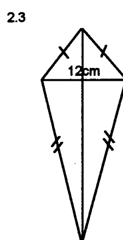


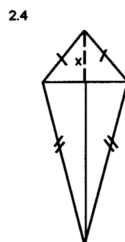


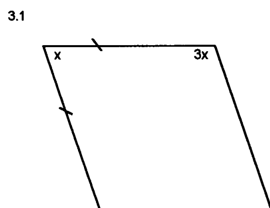


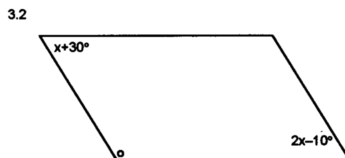


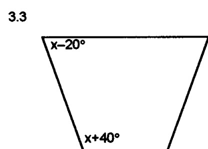


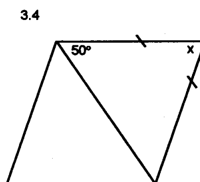












Assessering

LU 3

Ruimte en Vorm (meetkunde)Die leerder is in staat om eienskappe van en verwantskappe tussen tweedimensionele vorms en driedimensionele voorwerpe in ‘n verskeidenheid oriëntasies en posisies te beskryf en voor te stel.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

3.2 die onderlinge verwantskappe van meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe se eienskappe beskryf met bewyse in kontekste, insluitend dié wat gebruik kan word om ’n bewustheid van sosiale, kulturele en omgewingsake te bevorder, insluitend:

3.2.2 transformasies;

3.3 die meetkunde van reguitlyne en driehoeke gebruik om probleme op te los en verwantskappe in meetkundige figure te bewys;te beskryf, insluitend:

3.4 meetkundige figure teken en/of konstrueer en modelle van driedimensionele voorwerpe maak om die eienskappe daarvan en van modelsituasies in die omgewing te ondersoek en te vergelyk;

3.6 meetkundige driedimensionele voorwerpe herken en beskryf na aanleiding van perspektief, insluitend eenvoudige perspektieftekeninge;

3.7 verskeie verteenwoordigende stelsels gebruik om posisie en beweging tussen posisies te beskryf, insluitend:3.7.1 geordende roosters.

LU 4

MetingDie leerder is in staat om gepaste meeteenhede, instrumente en formules in ’n verskeidenheid kontekste te gebruik.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

4.4 die Stelling van Pythagoras gebruik om probleme op te los wat onbekende lengtes in bekende meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe behels.

Memorandum

Oppervlakte–berekenings

Daar word eerstens aandag gegee aan driehoek-oppervlaktes omdat dit so ‘n belangrike rol speel in die oppervlaktes van meer komplekse vorms, soos vierhoeke. Dis ook ‘n goeie aansluitingspunt tussen die bekende en die onbekende. Belangrike voorafkennis is weer die Stelling van Pythagoras.

‘n Algemene probleem by oppervlakte-berekenings is dat die hoogte en basis nie ooreenstem nie. Aangesien dit later weer probleme kan skep, sal dit die moeite loon om nou seker te maak dat almal dit hier bemeester. Die oefening waar leerders gevra word om basisse en hoogtes te meet en driekeer die oppervlakte uit te werk, sal help om die beginsel vas te lê; veral as hulle sien dat verkeerde groepering verkeerde antwoorde gee.

Die memorisering van die formules is minder belangrik as die verstaan van die *proses* wat gevolg

word om by die antwoord uit te kom. Hierdie vaardigheid word benodig by die algemene oplossing van meetkunde probleme.

Die oefening is eenvoudig en behels hoofsaaklik die substitusie van waardes in formules, en die noukeurige en akkurate bepaling van die antwoord.

1. 169 cm^2 (maak altyd seker dat leerders die regte eenhede gebruik)

2. 84,5 cm^2 (dis nie nodig om die sylengte te bereken nie)

3. 32,4 cm^2 4 60 cm^2

4. 36 cm^2 6 16,56 cm^2

5. 17,5 cm^2

6. 66 cm^2 (hoeklyne is loodreg; gebruik Pythagoras)

7. 153,75 cm^2 10 212,5 cm^2

Toepassing

Hier varieer die probleme tussen baie maklik en redelik moeilik. Afhanklik van die leerders se behoeftes, kan die opvoeder moeiliker werk insluit, en selfs probleme wat stapsgewyse bewyse vereis. In hierdie probleme is daar ekstra vrae wat logiese afleiding en redenasie vereis.

1.1 $a = 3$ cm $b = 4{,}243$ cm $c = 9$ cm2 Die hoeklyne *halveer* die 90° binnehoeke.

1.2 $a = 5$ cm $b = 24$ cm2 Hoeklyne van ‘n ruit is loodreg op mekaar.

1.3 $a = 12$ cm $b = 60$ cm2 Reghoeke het gelyke hoeklyne.

1.4 $a = 65^\circ$ $b = 115^\circ$ $c = 27$ cm2 Reghoeke is parallelogramme!

2.1 6 cm

2.2 $x = 152$ cm2 Ko-binnehoeke by ewewydige lyne is supplementêr.

2.3 $x = 27$ cm Vlieërs is vierhoeke en hulle binnehoeke se som is 360°.

2.4 $x = 9$ cm

3.1 $x = 45^\circ$ Alle hoeke van ‘n vierkant is gelyk; een is x en die ander 3 x.

3.2 $x = 40^\circ$ Aanliggende hoeke moet supplementêr wees, en $70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$.

3.3 $x = 80^\circ$ Slegs één paar sye ewewydig gemerk.

3.4 $x = 80^\circ$ Die driehoek is gelykbenig.

Om plan- en syaansigte van 3-dimensionele voorwerpe volgens skaal te teken

WISKUNDE

Graad 9

VIERKANTE, PERSPEKTIEFTEKENING, TRANSFORMASIES

Module 24

OM PLAN- EN SYAANSIGTE VAN DRIE-DIMENSIONELE VOORWERPE VOLGENS SKAAL TE TEKEN

Hoe om drie dimensies in twee in te pas

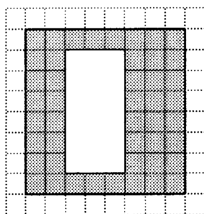
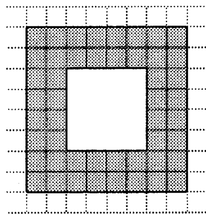
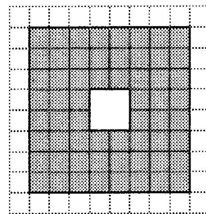
AKTIWITEIT 1

Om plan- en syaansigte van drie-dimensionele voorwerpe volgens skaal te teken

[LU 1.3, 3.4]

Ortografiese projeksies

Daar is drie tekeninge op die blokkiespapier hieronder. Elk wys ‘n ander aansig van dieselfde blok met gate in.

Ons noem hierdie drie die ortografiese aansigte van die voorwerp. Die tekeninge is gedoen vanuit die oogpunt van iemand wat direk na die middel van elke kant van die blok kyk, met die siglyn loodreg op die kant. Orto verwys na 90°.

Indien elke blokkie op die papier 1cm2 voorstel, bereken die buite-afmetings van die blok. Bereken die totale volume hout wat verwyder is met die drie verskillende gate in die blok.

Hierdie soort tekening weergee die mates van die voorwerp akkuraat volgens skaal. Dit is dus moontlik vir iemand wat die voorwerp moet maak of bou om dit akkuraat te doen. Argitekte gebruik ortografiese projeksies om tekeninge te maak van die plan van ‘n gebou, asook van die aansigte vanaf die voorkant en die sye. Hierdie tekeninge (en ook ander tegniese spesifikasies) moet deur ‘n bouer voorgelê word aan die mense wat hom toestemming moet gee om met bouwerk voort te gaan.

Probeer om die plan van julle huis so noukeurig moontlik te teken; teken ook die vooraansig van die huis. Onthou dat jy moet besluit hoeveel meter in

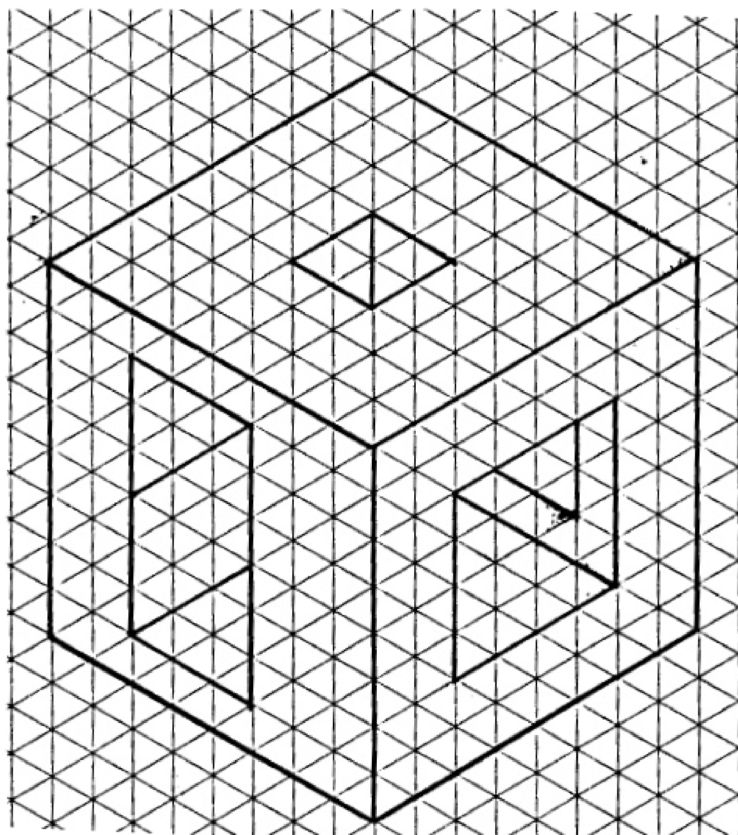
die huis voorgestel gaan word deur een sentimeter op jou tekening; dit is die skaal van jou tekening.

AKTIWITEIT 2

Om die betekenis en toepassing van isometriese projeksies te begryp

[LU 3.4]

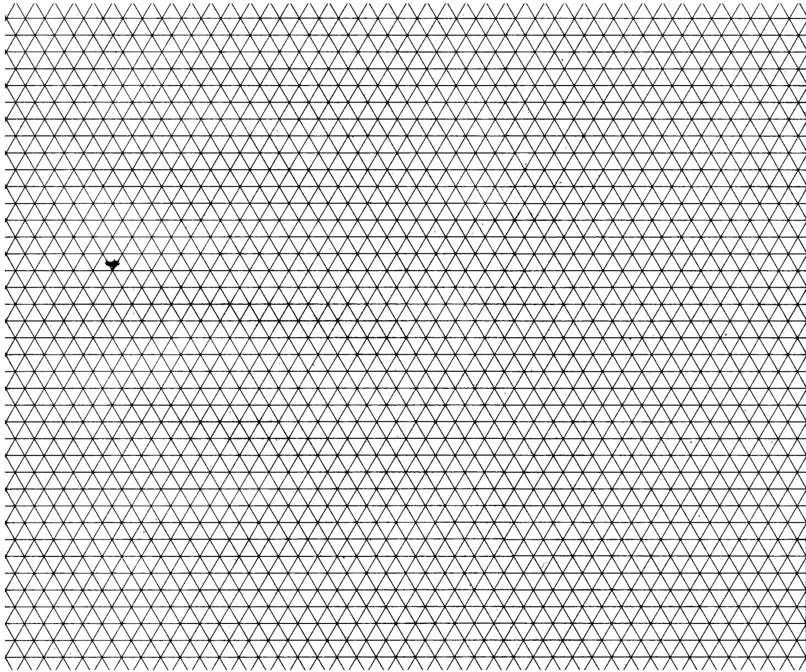
Isometriese projeksie



Hierdie is ‘n drie-dimensionele tekening van dieselfde blok. Die afmetings van die voorwerp kan weer vanuit die tekening bepaal word, soos die ortografiese tekeninge hierbo. Iso verwys na dieselfde en metries verwys na meting.

Isometriese tekeninge is baie handig, maar dit is nie ‘n goeie weergawe van wat ons werklik sien as ons die blok voor ons het nie. Om ‘n meer realistiese prentjie van die voorwerp te kry, maak ons ‘n perspektieftekening. Dit word in die volgende afdeling behandel.

Hier is isometriese papier vir jou. Neem een van jou “vet” handboeke en teken ‘n isometriese projeksie daarvan. Bepaal egter eers ‘n goeie skaal vir die tekening.



AKTIWITEIT 3

Om die betekenis en toepassing van perspektieftekene te verstaan

[LU 3.6]

Een–punt perspektiefprojeksies

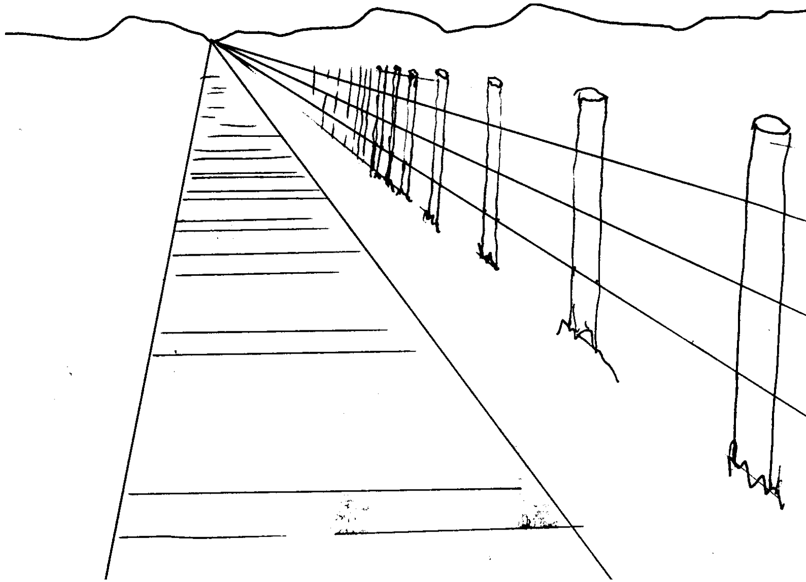
Só kan jy self ‘n perspektieftekening op ‘n venster maak (gebruik ‘n pen wat van die glas sal afwas as jy klaar is, of plak deurskynende papier op die glas om op te teken). Aan die buitekant van die glas plaas jy die voorwerp wat jy wil teken – soos dalk ‘n skoendoos op ‘n tafel – sodat jy die hele voorwerp deur die glas kan sien. Moenie die kartondoos

loodreg voor die venster plaas nie, maar liewer met een hoek vorentoe. Dis noodsaaklik dat jou kop doodstil bly terwyl jy werk. Teken op die glas presies wat jy sien, veral die rante van die doos. Later kan jy jou werk met die verduideliking hieronder vergelyk om te sien hoe goed jy gewerk het.

Dit is natuurlik nie wat ‘n argitek doen as hy ‘n tekening van ‘n gebou wat nog gebou moet word, moet maak nie! Hy gee die ortografiese tekeninge wat klaar is aan ‘n tekenaar wat dan van wiskundige beginsels gebruik maak om ‘n perspektieftekening te skep.

‘n Mens kry een-punt, twee-punt en drie-punt perspektieftekeninge. Hierdie getalle verwys na die aantal verdwynpunte in die tekening.

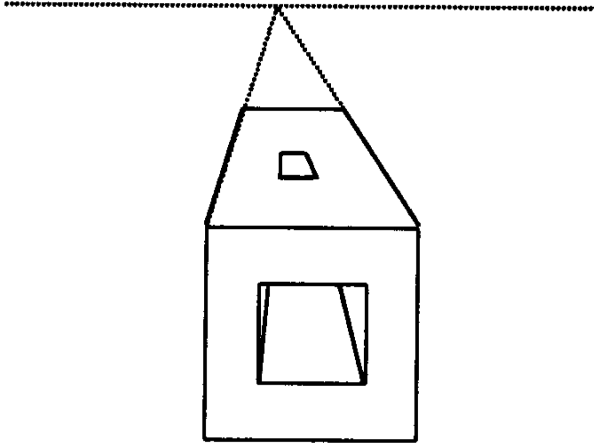
Hier is ‘n eenvoudige skets in een-punt perspektief van ‘n landskap met ‘n spoorlyn en heining. Daar is een punt op die horison waar al die lyne in die skets blykbaar ontmoet en verdwyn.



In die skets lyk dit asof die dwarslêers en die pale nader en nader aan mekaar kom soos hulle in die verte verdwyn; maar ons weet goed dat hulle spasiëring ewe groot bly. Dit lyk ook asof die spoorlyne al nader aan mekaar beweeg, soos ons oë na die horison beweeg. Hulle is egter ewewydig. Die afstande tussen die dwarslêers, en tussen die pale, word kleiner in verhouding met hoe ver hulle van jou af is. Uit hierdie effekte kry ons die illusie (of skyn) van drie dimensies, al is die tekening in twee dimensies op ‘n plat stuk papier.

Volgende is ‘n perspektieftekening van die blok waarmee ons hierdie eenheid begin het. Dis duidelik ‘n meer realistiese weergawe van die voorwerp soos dit werklik in drie dimensies sou lyk. Die stippellyne wys die horison en die verdwynpunt.

Die kunstenaar en argitek Filippo Brunelleschi het in die vroeë vyftiende eeu ontdek hoe perspektief werk en dit in sy werk gebruik.



Probeer om ‘n eenpunt perspektieftekening te maak van die blok, vanaf die kante van die blok wat ons nie in hierdie skets kan sien nie.

Assessering

Leeruitkomstes(LUs)
LU 1
Getalle, Verwerkings en VerwantskappeDie leerder is in staat om getalle en die verwantskappe daarvan te herken, te beskryf en voor te stel, en om tydens

probleemoplossing bevoeg en met selfvertroue te tel, te skat, te bereken en te kontroleer.

Assesseringstandaarde(ASe)

Dit is duidelik wanneer die leerder:

1.3 probleme in konteks oplos, insluitend kontekste wat gebruik kan word om bewustheid te bou van ander leerareas, asook menseregte, sosiale, ekonomiese en omgewingsake soos:

metings in die konteks van Natuurwetenskappe en Tegnologie.

LU 3

Ruimte en Vorm (meetkunde)Die leerder is in staat om eienskappe van en verwantskappe tussen tweedimensionele vorms en driedimensionele voorwerpe in ‘n verskeidenheid oriëntasies en posisies te beskryf en voor te stel.

Dit is duidelik wanneer die leerder:

3.2 die onderlinge verwantskappe van meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe se eienskappe beskryf met bewyse in kontekste, insluitend dié wat gebruik kan word om ’n bewustheid van sosiale, kulturele en omgewingsake te bevorder, insluitend:

3.2.2 transformasies;

3.3 die meetkunde van reguitlyne en driehoeke gebruik om probleme op te los en verwantskappe in meetkundige figure te bewys;te beskryf, insluitend:

3.4 meetkundige figure teken en/of konstrueer en modelle van driedimensionele voorwerpe maak om die eienskappe daarvan en van modelsituasies in die omgewing te ondersoek en te vergelyk;

Memorandum

Bespreking

Agtergrond

Meeste mense weet min van die belangrikheid van projeksies, tensy hulle tekenaars is. Die leerders wat tegniese tekene as vak aanbied, sal heelwat weet van projeksies. Gebruik hulle gerus as adviseurs vir die ander leerders.

Die verduidelikings in die leerdermodule is redelik volledig. Leerders moet dalk op hierdie stadium herinner word aan skaalfaktore soos hulle dit by eweredigheid gedoen het. By hierdie soort werk, en in kartografie (die maak van kaarte) kom die nut na vore.

Isometriese tekeninge is maklik met isometriese papier soos by die leerdermodule ingesluit. Andersinds vereis dit gevorderde tegnieke en tekenapparaat. Die opvoeder kan dalk ‘n eenvoudige reghoekige voorwerp (soos ‘n skoenedoos) vir die leerders gee om te teken.

Dit is nie prakties om graad 9-leerders die ingewikkelde wiskundige tegnieke te leer wat benodig word vir perspektief (selfs relatief eenvoudige een-punt perspektief) tekeninge nie. Die oefening om op die venster te teken is ‘n goeie praktiese oefening wat hulle sal help verstaan wat

perspektief is. As ‘n argitek ‘n perspektieftekening aan die klas kan leen of skenk, sal dit baie help.

Dié leerders wat in kuns belangstel kan aangemoedig word om meer uit te vind oor die kunstenaars wat in die vroeë vyftiende eeu begin eksperimenteer het met perspektief-effekte, en doelbewus hul onderwerpe gekies het om hierdie tegniek te gebruik.

Om die beginsel van translasie en geskikte notasies te leer

WISKUNDE

Graad 9

VIERKANTE, PERSPEKTIEFTEKENING, TRANSFORMASIES

Module 25

OM DIE BEGINSEL VAN TRANSLASIE EN GESKIKTE NOTASIES TE LEER

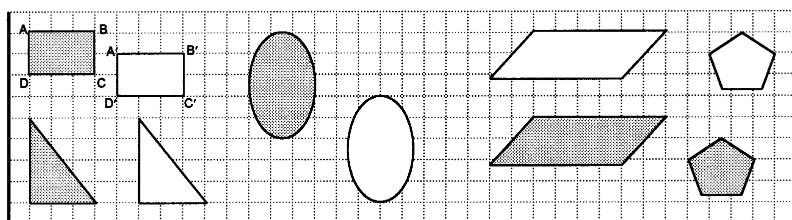
Hoe figure beweeg en inmekaar gepas kan word

AKTIWITEIT 1

Om die beginsel van translasie en geskikte notasies te leer

[LU 3.2, 3.7]

Transformasie deur translasie



Die skets toon die *eerste kwadrant* van 'n *Cartesiese vlak*. Daarop is tien *vlakfigure* te sien.

Sê nou jy sny die vyf *geskakeerde* figure los, en beweeg hulle na nuwe posisies (ongeskakeer) deur hulle oor die bladsy te *skuif,* dan het jy hulle *getransleer*. Let op dat hulle nog dieselfde oriëntasie het – hulle is nog regop. Hierdie figure is getransformeer d.m.v. translasie.

- Skryf die name van die vyf figure neer.

As jy die hoeke van 'n figuur benoem, dan is die benoeming in die nuwe posisie soortgelyk, maar nie eenders nie. Dis sigbaar by die reghoek. Van nou af moet jy dieselfde stelsel in jou benoeming gebruik.

In die geval van die reghoek beweeg punt A na posisie A□, B na B□, ens.

Daar is verskeie maniere om translasies te beskryf. Dis ‘n manier om iemand instruksies te gee sodat hy kan doen wat jy wil hê.

1. Byvoorbeeld, as ek sê: “Beweeg die ovaalvorm 4½ eenhede regs en 3 eenhede af”, dan gee dit die nuwe posisie van die ovaal.

Beskryf die nuwe posisie van die vyfhoek op dieselfde manier in woorde.

2. Transleer die vierkant:

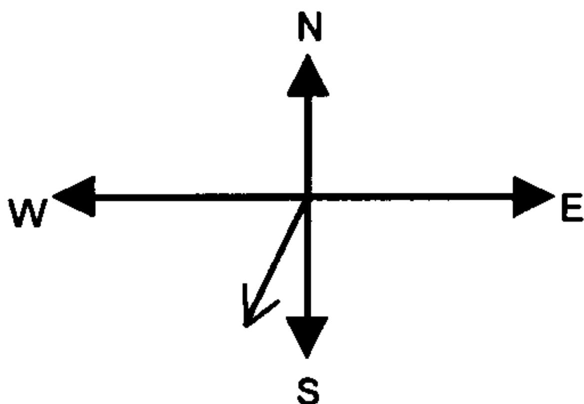
vierkant ABCD → vierkant A□B□C□D□ beteken *beeld* vierkant ABCD *af op* vierkant A□B□C□D□. ‘n Mens kan dit beter sê met koördinate: A (1 ; 9) → A□ (5 ; 8) en B(4 ; 9) → B□(8 ; 8), ens.

Gebruik die koördinaatafbeeldingsmetode om die translasie van die driehoek te beskryf. Benoem die hoekpunte A, B en C.

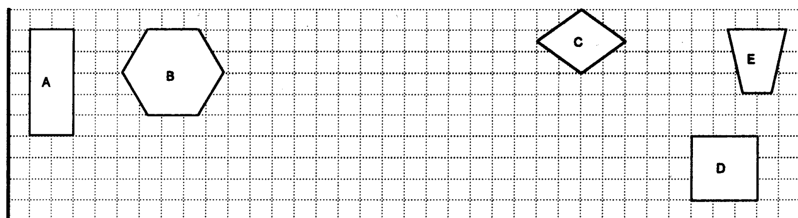
3. Ons kan ook die rigting waarin die vorm moet skuif, spesifiseer deur van *kompasrigtings* gebruik te maak. Dit sê hoeveel grade (navigators gebruik gewoonlik drie syfers) daar kloksgewys gedraai moet word. Verwys na die skets. Dis duidelik dat oos 090° en wes 270° is. Die lyn is by ongeveer 200°. Die driehoek in die skets hierbo is vyf eenhede weg

in die rigting 090°; met ander woorde, as jy op die toppunt van die driehoek staan, is die nuwe posisie van die toppunt vyf eenhede weg as jy na die ooste kyk.

Gebruik afstand en rigting om die parallelogram te transleer.



Skryf die name van die figure (A tot E) neer, benoem die hoekpunte en teken hulle dan op die blokkies in nuwe posisies, getransleer volgens die beskrywings hieronder. Benoem dan die nuwe hoekpunte behoorlik. Wenk: Werk in potlood totdat jy seker is!



A 21 eenhede regs en 3 eenhede af

B 11 eenhede in die rigting 090°

C 20 eenhede links en 6 eenhede af

D (31 ; 4) → (11 ; 6), (34 ; 4) → (14 ; 6), (31 ; 1) → (11 ; 3) en (34 ; 1) → (14 ; 3)

E 7 eenhede in die rigting 270°, gevolg deur 4 eenhede in die rigting 180°

AKTIWITEIT 2

Om refleksie te verstaan en te gebruik

[LU 3.2, 3.7]

Transformasie deur refleksie

Kyk weer na die laaste probleem (E) in die vorige deel. Sien jy dat dit twee translasies, een na die ander, is? Die beskrywings van A en C is dieselfde! Dit gebeur dikwels, aangesien dit baiekeer die eenvoudigste manier is om ‘n ingewikkelde transformasie te beskryf.

Stip die volgende punte aan op die gegewe Cartesiese vlak, verbind hulle in orde met reguit lyne om die figuur te teken en beeld dan die koördinate af soos aangedui om die figuur te transformeer.

A(2 ; 2) , B(2 ; 4) , C(4 ; 4) , D(4 ; 6) , E(6 ; 6) , D(6

; 2) , A(2 ; 2)

A(2 ; 2)→A□(12 ; 2) ,

B(2 ; 4)→B□(12 ; 4) ,

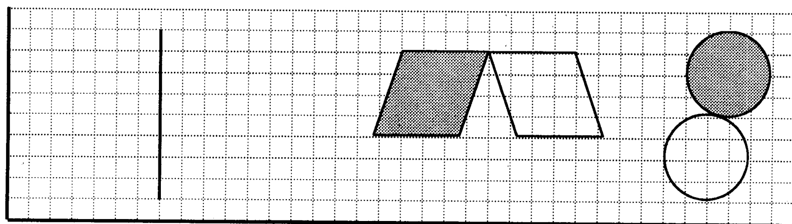
C(4 ; 4)→C□(10 ; 4) ,

D(4 ; 6)→D□(10 ; 6) ,

E(6 ; 6)→E□(8 ; 6) ,

D(6 ; 2)→D□(8 ; 2).

Sien jy dat die figuur in die lyn *gereflekteer* is? Dit beteken dat as jy die diagram op daardie lyn sou vou, die figuur sou saamval met sy beeld. Anders gestel, die lyn is 'n simmetrie-lyn vir die figuur en sy refleksie.



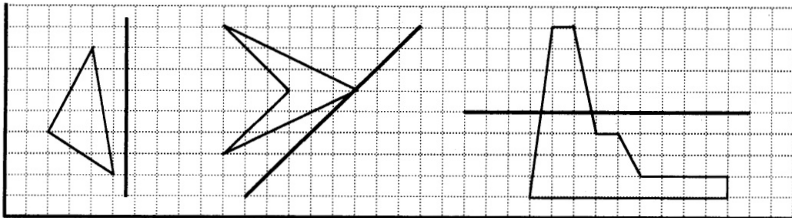
- Die parallelogram is ook d.m.v. refleksie getransformeer. Teken die refleksielyn.
- Teken die refleksielyn vir die sirkel.
- 'n Mens kan ook sê dat die sirkel *getransleer* is. Beskryf hierdie translasie in woorde. Wat is die eienskap(pe) van die sirkel wat maak dat dit op twee maniere beskou kan word – óf refleksie óf

translasie?

Kies een van die figure hierbo en verbind elke punt van die figuur met die ooreenstemmende gereflekteerde punt. Vind die middelpunte van hierdie lyne en trek een lyn deur al die middelpunte. Dit is die refleksielyn.

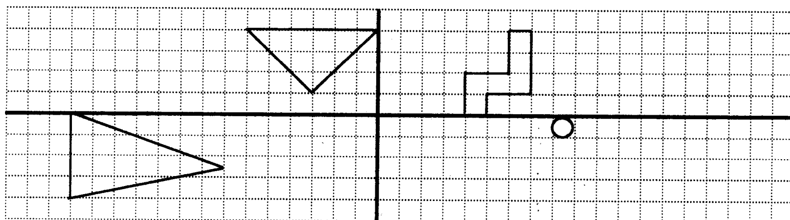
- Bevestig op hierdie manier die refleksielyne van al drie figure hierbo.

Reflekteer elke vorm in die gegewe lyn en teken die beeld op die diagram wat volg. Let jy op dat die refleksielyn die figuur kan sny of kan raak? Dit kan selfs buite die figuur wees.



Ons reflekteer dikwels figure in die *x*–as of die *y*–as.

- Op hierdie Cartesiese vlak moet jy elke figuur in die *x*–as reflekteer, dan in die *y*–as en dan weer in die *x*–as, sodat jy vier van hulle het, elk in ‘n ander kwadrant.



AKTIWITEIT 3

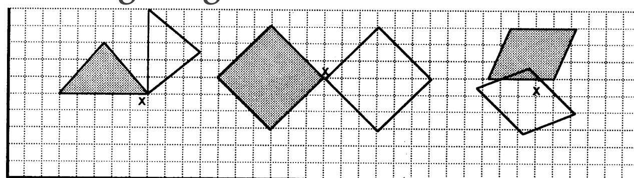
Om te leer hoe om deur rotasie te transformeer, en om translasies te kombineer

[LU 3.2, 3.7]

Rotasie

In die diagram is daar ‘n punt X op elke figuur. Sê nou die geskakeerde vorm was losgesny. As ‘n speld by X ingesteek word en die vorm om die speld gedraai word om met die ongeskakeerde figuur saam te val, noem ons die transformasie *rotasie*. Ons moet hoeke (grade) gebruik om te beskryf hoe ver dit geroteer is. Byvoorbeeld: Die driehoek is kloksgewys deur 90° geroteer.

- Skryf neer hoe ver en in watter rigting elk van die ander figure geroteer is.

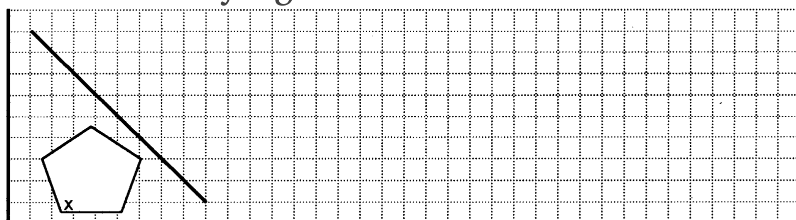


- Benoem elke hoekpunt van die drie figure en beskryf elke transformasie in terme van

koördinaat = afbeeldings.

- Beskryf die transformasie van die vierkant as ‘n translasie (a) in terme van afstand en rigting en (b) in woorde.
- Beskryf die transformasie van die vierkant as ‘n refleksie.

Die figuur hieronder is figuur A. Teken figuur B deur figuur A in die gegewe lyn te reflekteer. Teken dan figuur C deur figuur B 8 eenhede regs en 2 eenhede af te transleer. Roteer dan figuur C 180 ° om die punt X in figuur A om figuur D te gee, Ons kan sê dat figuur D ‘n *komplekse transformasie* van figuur A is, omdat ons verskeie stappe moes deurwerk om by figuur D uit te kom.



GROEPWERK

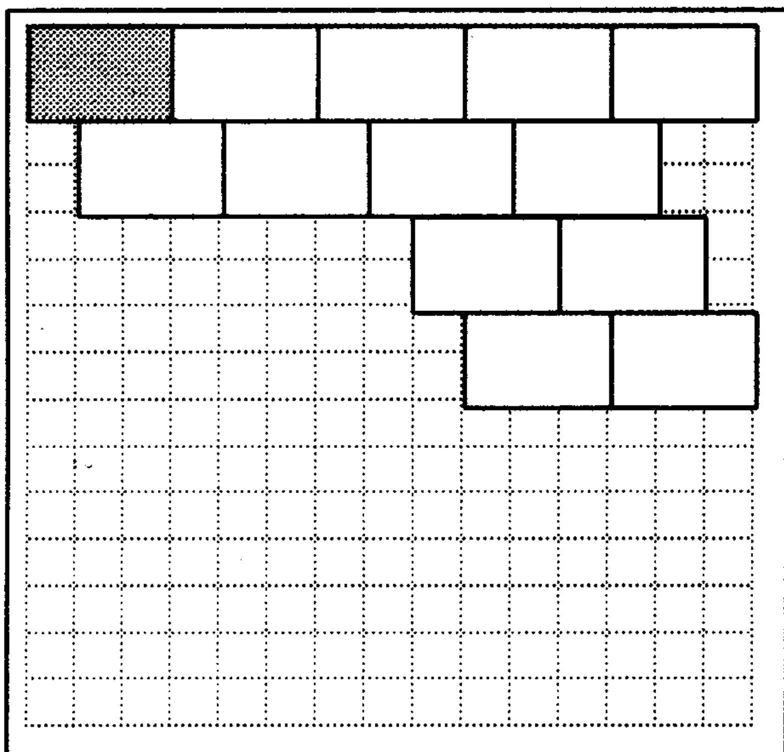
Om te leer hoe om deur rotasie te transformeer, en om translasies te kombineer

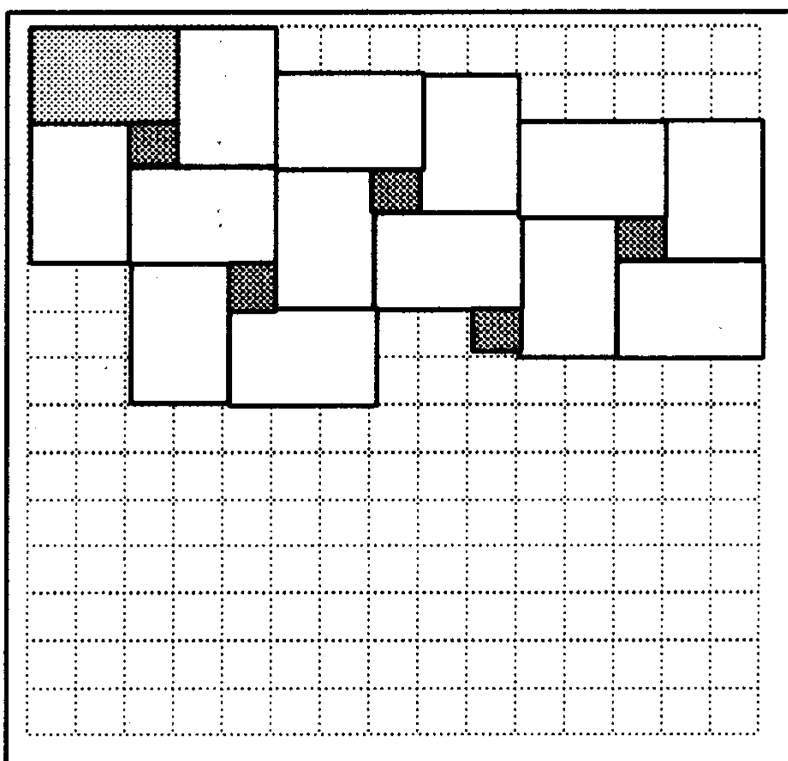
[LU 3.2, 3.7]

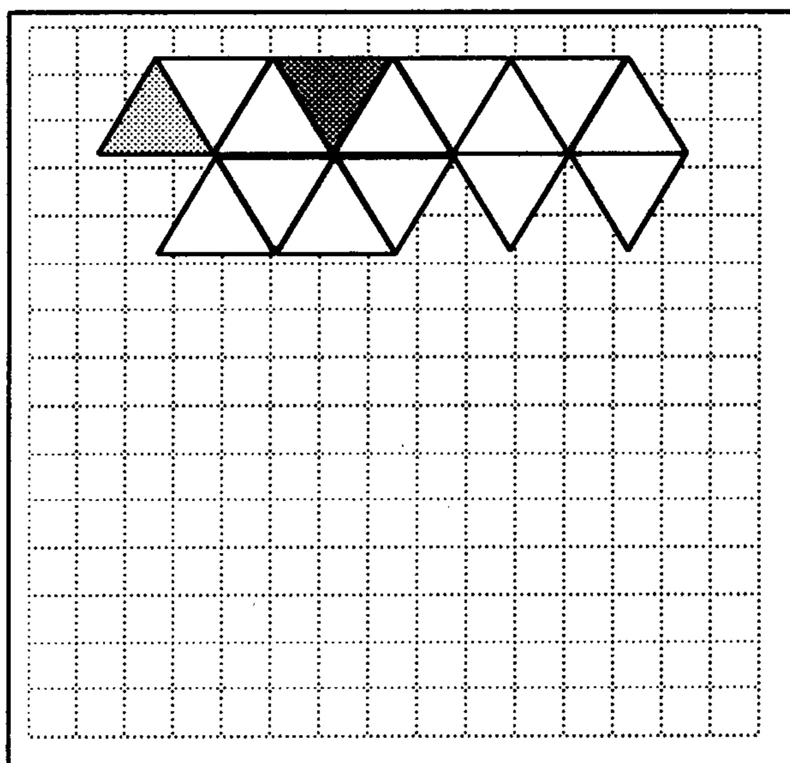
Merkwaardige en uitgebreide gebruik van tessellasies is te vinde in die versierings wat aangebring is op geboue in die Islamitiese wêreld. Die Moslem-geloof verbied die maak van *beelde*;

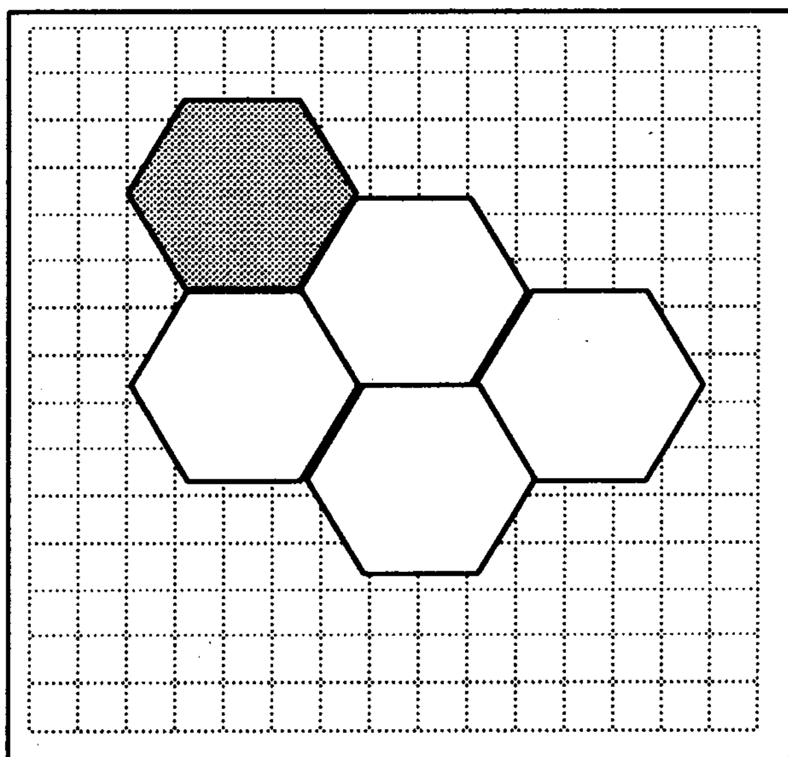
daarom het die bouers op *vorms* gekonsentreer. Die Persiërs was bekwame wiskundiges,en het so die reëls vir tessellasies tot stand gebring. Daar is briljante teëlwerk te sien in hulle moskees en ander belangrike kulturele geboue. Besonder belangrik is dat die oppervlakke dikwels geboë was, en nie plat nie – dus met meer interessante tessellasies.

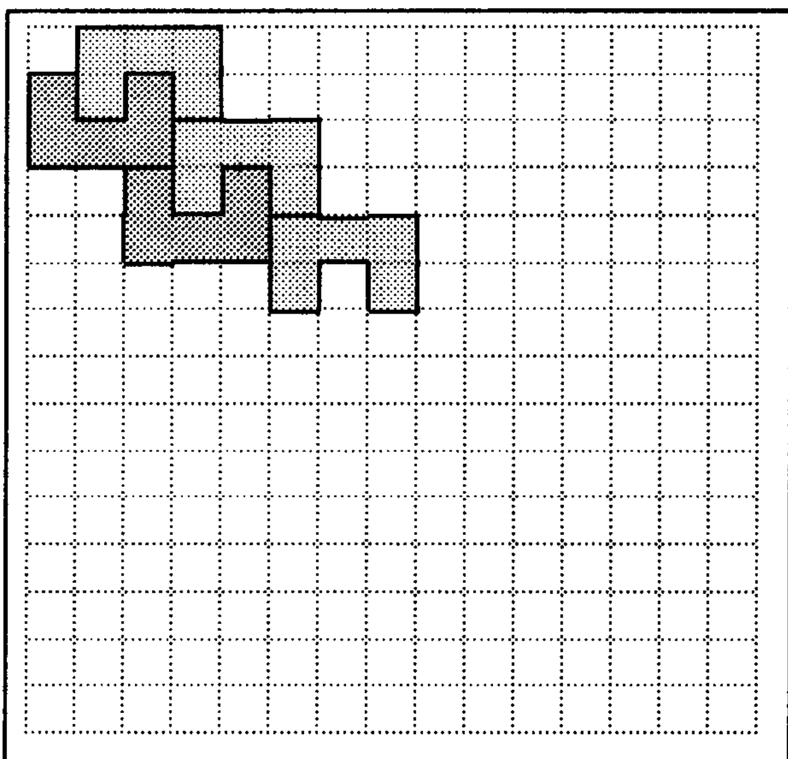
- As jy teëls so kan ontwerp dat jy hulle langs mekaar kan lê sonder dat hulle oorvleuel of gate los, dan praat ons van 'n tessellasie.
- Jy kan self eksperimenteer deur vorms uit karton uit te sny en hulle dan inmekaar te pas.
- Dit kan ook as 'n diagram op papier gedoen word deur die beginsels van transformasie (translasie, refleksie en rotasie) op 'n vorm toe te pas totdat die oppervlak volkome getesselleer is.
- Die figure kan eenvoudig wees, sonder enige transformasie behalwe translasie, of ingewikkeld met komplekse transformasies. As jy jouself toelaat om twee of meer verskillende vorms te gebruik is pragtige ontwerpe moontlik.
- Hier volg 'n paar tessellasies. In 'n groepie, bespreek wat jy waarneem en probeer dan neerskryf presies watter transformasie (translasie, refleksie en rotasie) op die vorm toegepas is. Vergelyk julle antwoorde. Voltooi die onvoltooide ontwerpe.

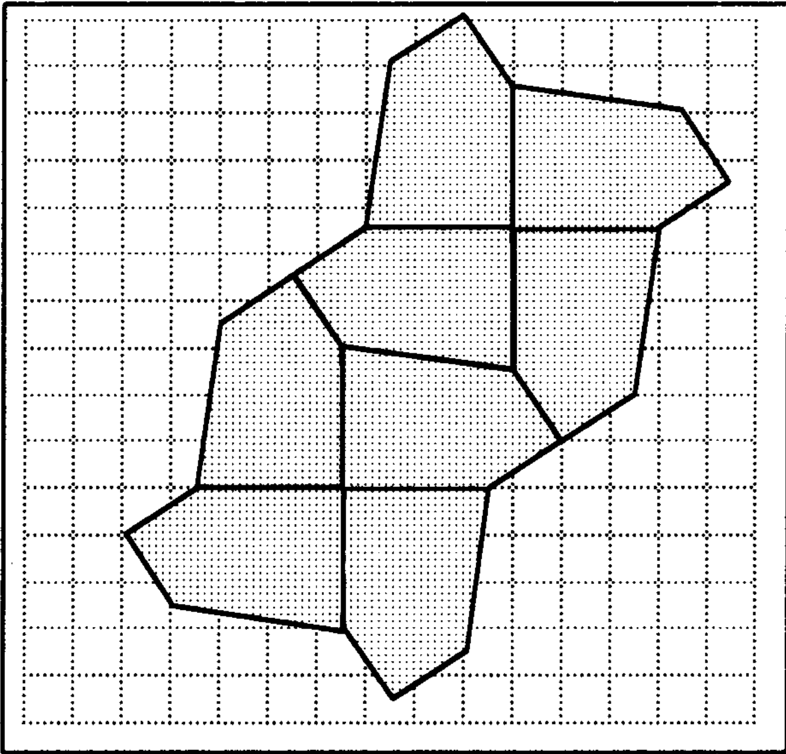












Assessering

LU 3
Ruimte en Vorm (meetkunde)Die leerder is in staat om eienskappe van en verwantskappe tussen tweedimensionele vorms en driedimensionele voorwerpe in 'n verskeidenheid oriëntasies en

posisies te beskryf en voor te stel.
Dit is duidelik wanneer die leerder:
3.2 die onderlinge verwantskappe van meetkundige figure en driedimensionele voorwerpe se eienskappe beskryf met bewyse in kontekste, insluitend dié wat gebruik kan word om ’n bewustheid van sosiale, kulturele en omgewingsake te bevorder, insluitend:
3.2.2 transformasies;
3.3 die meetkunde van reguitlyne en driehoeke gebruik om probleme op te los en verwantskappe in meetkundige figure te bewys;te beskryf, insluitend:
3.4 meetkundige figure teken en/of konstrueer en modelle van driedimensionele voorwerpe maak om die eienskappe daarvan en van modelsituasies in die omgewing te ondersoek en te vergelyk;
3.6 meetkundige driedimensionele voorwerpe herken en beskryf na aanleiding van perspektief, insluitend eenvoudige perspektieftekeninge;
3.7 verskeie verteenwoordigende stelsels gebruik om posisie en beweging tussen posisies te beskryf, insluitend:3.7.1 geordende roosters.

Memorandum

Bespreking

Woordeskat

‘n Mens moet die nogal tegniese woordeskat en

notasies in hierdie eenheid gebruik en beklemtoon sodat die leerders daaraan gewoond kan raak. Antwoorde volg.

Translasie

Eerste diagram.

Die vyf vorms is reghoek, driehoek, ovaal, parallelogram en vyfhoek (of pentagoon).

Die vyfhoek is vyf eenhede af en een eenheid links getransleer.

A (1 ; 5) → A□ (6 ; 5)

B(1 ; 1) → B□(6 ; 1)

C(4 ; 1) → C□(9 ; 1)

Die parallelogram is 4 eenhede weg in die rigting 180°.

Tweede diagram.

Die vorms is reghoek, heksagoon (seshoek), ruit, vierkant en trapesium.

Die leerders kan mekaar se werk assesseer.

Refleksie

Derde diagram.

Refleksie is ‘n belangrike transformasie. Dit hou verband met simmetrie; ‘n belangrike eienskap in meetkunde. Dit is ook die enigste transformasie wat *omkeer* behels. ‘n Klein reghoekige spieëltjie kan gebruik word om die idee van spieëlbeeld te illustreer. Plaas die kant van die spieëltjie op die simmetrie-lyn (refleksielyn).

Die parallelogram is gereflekteer in die vertikale lyn *tussen* die twee spieëlbeelde.

Die sirkel is ‘n spesiale geval, met oneindig veel simmetrie-asse. Hierdie feit kan ‘n goeie bespreking oor simmetrie inlei.

Daar is nie iets besonder moeilik in die vierde diagram nie – dis bloot vir oefening. In die vyfde word refleksie ingespan om simmetriese ontwerpe voort te bring.

Rotasie

As daar genoeg tyd is, kan leerders toegelaat word om rotasie te oefen met uitgeknipte figure en ‘n speld. Dit sal besonder leersaam wees vir dié leerders wat nog probleme ondervind met hoekmetings.

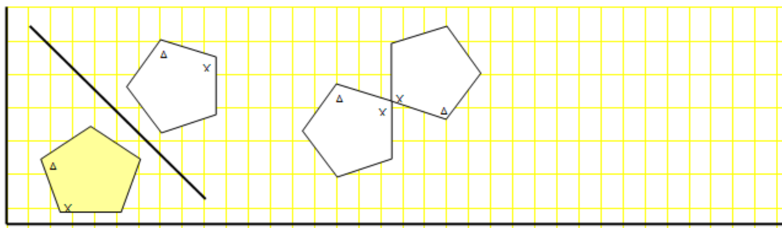
Die vierkant is deur 180° geroteer.

Die parallelogram is kloksgewyse deur 225° geroteer. (Of 135° teen-kloksgewyse.)

Die parallelogram is die enigste figuur wat effens moeilik is om d.m.v. ko-ordinaatafbeelding te doen weens die breukdele – die res is eenvoudig.

Die vierkant is (a) 6 eenhede in die rigting 090° of (b) 6 eenhede regs getransleer.

Die vierkant is gereflekteer in die vertikale lyn met definisievergelyking $x = 18$.



AXHierdie diagram is die antwoord op die rotasie-oefening. Dis leersaam om te sien hoe die hoekpunt wat met ‘n A gemerk is van posisie verander.

Tessellasies

Die werk oor tessellasies word ingesluit hoofsaaklik vir die plesier wat leerders daaruit kan put, en om te wys hoeveel prag en verskeidenheid dit kan produseer. Daar is baie materiaal oor die onderwerp. Leerders moet aangemoedig word om uit te vind wat die plaaslike biblioteek bied.

Die ontwerpe is doelbewus onvoltooid gelaat. Laat leerders toe om hulle in te kleur en hulle voltooide ontwerpe op die bord te plak.